# IL BOOTSTRAP E SUE APPLICAZIONI CON R ALLA LOSS RESERVE ED ALLA POLITICA LIQUIDATIVA

**PRIMA PARTE**

**E.Ciminelli , C.Binnella**

***Dipartimento di Scienze Statistiche, Sapienza Università di Roma***

**Abstract**

L'esigenza di studio del Bootstrap deriva dalla ricerca di metodi stocastici di stima delle loss reserve. Per poter fruire di una metodologia è necessario conoscerla approfonditamente, cogliere le caratteristiche, la struttura, le proprietà, i pregi e difetti. A ciò mira questo paper che propone dell'uso congiunto del bootstrap con strumenti di analisi come la *Dynamic Financial Analisis* per la stima e l'analisi della loss reserve e della politica liquidativa.

*Key words*: Loss Reserve,Policy aimed at liquidation, Bootstrap, Standard error, Prediction error, Predictive distribution, Generalized Linear Model, Dynamic Financial Analisis.

## 1 Introduzione

L'evolversi delle problematiche attuariali, in parallelo alle nuove esigenze del mercato globale ed al continuo processo di cambiamento dei contesti attuariali, richiede l'individuazione di strumenti sempre più raffinati. La valutazione delle riserve sinistri diviene, per esigenze normative e di dinamica dei mercati assicurativi, di tipo stocastico. A tale proposito England, Verrall (2002) sostengono che:

*"The primary advantage of stochastic reserving models is the availability of measures of precision of reserve estimates, and in this respect, attention is focused on the root mean squared error of prediction (prediction error)."*

Vedremo l'applicazione della metodica bootstrap nel caso di stime attraverso i Generalized Linear Models (GLMs), sia della riserva sinistri sia della rappresentazione della politica liquidativa adottata dall'impresa. Considerati il bootstrap ed i Generalized Linear Models (GLMs) utilizzati in modo combinato con strumenti di analisi quali la *Dynamic Financial Analysis (DFA)*, in ottica di analisi dei cash flows, per valutare la riserva sinistri e la politica liquidativa secondo la logica dei sistemi di controllo interno.

# 2 Il Bootstrap

## 2.1 Definizioni ed applicazioni

La sua introduzione è dovuta ad Efron (1979), il bootstrap non nasce come metodologia se stante, ma piuttosto come *strumento* da applicare alle procedure statistico-inferenziali, quali la regressione, la stima della densità, la stima della varianza ed errore standard, la definizione di intervalli di confidenza etc.

Il bootstrap è definito da Efron metodo base informatico per attribuire misura di accuratezza alla stima di una statistica, quindi è un processo di stima, *stima bootstrap dell'errore standard* della statistica.

### 2.2 Bootstrap

Efron (1979) propone la stima dell'errore standard attraverso la tecnica bootstrap, lo fa introducendo il *bootstrap sample* $\mathrm{x}^* = (x_1^*,...,x_n^*)$, ottenuto *estraendo con ripetizione n* volte dal campione dei dati originari $\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)$, ad esempio per n=5 si potrebbe avere $\mathrm{x}^* = (x_4, x_3, x_1, x_3, x_2)$.

Quindi si costruiscono in tal modo *B bootstrap samples* $\mathrm{x}_1^*, \mathrm{x}_2^*,..., \mathrm{x}_B^*$, ciascuno di dimensione *n*. Per il campione **x** si considera la statistica $s(\mathrm{x})$ e per ciascuno degli B *bootstrap samples* si ha la statistica $s(\mathrm{x}_1^*), s(\mathrm{x}_2^*),..., s(\mathrm{x}_B^*)$; tali statistiche sono replicazioni della $s(\mathrm{x})$.

Il massimo numero di distinti *bootstrap samples* ottenibili da n osservazioni estraendo con ripetizione è

$$m = \binom{2n-1}{n} \qquad (1)$$

La stima bootstrap dell'errore standard della statistica $s(\mathrm{x})$ è la deviazione standard delle replicazioni bootstrap di detta statistica ed è:

$$\left.\begin{aligned} &\hat{se}_{boot} = \left\{ \sum_{b=1}^{B} \left[ s(x_b^*) - s(\cdot) \right]^2 /(B-1) \right\}^{1/2} \\ &con \\ &s(\cdot) = \sum_{b=1}^{B} s(x_b^*) / B \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

L'obiettivo iniziale di Efron è di quantificare l'*accuratezza* della stima della statistica, lo strumento è il bootstrap.

### 2.2.1 La stima bootstrap dello standard error

Definito il bootstrap sample, si considera la distribuzione empirica $\hat{F}$, assegnando probabilità *1/n* a ciascun valore osservato $x_i$ , quindi il bootstrap sample può essere visto come un campione aleatorio di ampiezza *n* con distribuzione $\hat{F}$.

$$\text{Bootstrap:} \quad \hat{F} \rightarrow (x_1^*,\ldots,x_n^*) \qquad (3)$$

Il vettore **x*** è interpretabile come una versione random di **x**, vettore campionario, quindi considerata la statistica $\theta$ e la sua stima $\hat{\theta}$, si ha che una replicazione di tale stima è data da:

$$\hat{\theta}^* = s(x^*) \qquad (4)$$

La stima bootstrap dell'errore standard $se_F(\hat{\theta})$ è data da: $se_{\hat{F}}(\hat{\theta}^*)$; anche detta *stima bootstrap ideale dell'errore di* $\hat{\theta}$.

Rendere operative tali formule è semplice, Efron lo fa con un algoritmo.

Algoritmo bootstrap per la stima dello standard error:

1. *selezionare B bootstrap samples indipendenti* $x_1^*,\ldots,x_B^*$, consistenti ciascuno di n valori estratti con ripetizione da **x**,

2. *calcolare la replicazione bootstrap per ciascun bootstrap sample della statistica:*

$$\hat{\theta}_b^* = s(x_b^*) \quad \text{con } b=1,2,\ldots,B \qquad (5)$$

3. *Stimare l'errore standard* $se_F(\hat{\theta})$ *dalla deviazione standard campionaria delle B replicazioni:*

$$\hat{se}_B = \left\{ \sum_{b=1}^{B} \left[ \hat{\theta}^*(b) - \hat{\theta}^*(\cdot) \right]^2 / (B-1) \right\}^{1/2}$$
$$\text{con} \qquad (6)$$
$$\hat{\theta}^*(\cdot) = \sum_{b=1}^{B} \hat{\theta}^*(b) / B$$

Tale algoritmo è replicabile con un listato in linguaggio S o con il programma R che è dotato di pacchetti che consentono di utilizzare la tecnica bootstrap.

# 3 Il bootstrap nella tecnica attuariale no life

In letteratura le prime applicazioni del bootstrapp alla stima delle loss reserves sono date da Lowe (1994), Verrall (1999) e Taylor (2000).

Nel 2003 De Felice e Moriconi utilizzano il bootstrap per stimare la loss reserve nella pubblicazione "Risk Based Capiytal in P&C Loss Reseving o Stressing the Triangle".

Taylor e Mc Guire (2005) utilizzano il bootstrap per individuare legami di dipendenza tra le loss reserves per più rami no life.

Attualmente l'interesse delle possibili applicazioni del bootstrap si origina dai grandi cambiamenti di ordine contabile che stanno interessando il settore assicurativo, data l'introduzione dei principi IAS ed IFRS ed al contempo l'avvicinarsi dell'ultimazione del progetto Solvency II.

Per ciò che riguarda i rami no life, negli ultimi anni è cresciuto l'interesse sull'*outstanding loss liability* (OLL) sia per gli adeguamenti per il rischio nelle valutazioni a *fair value* sia per la determinazione di un margine prudenziale nella loss reserve.

Per fornire una valutazione completa della loss reserve è necessario studiare la ***variabilità*** che caratterizza i futuri esborsi che concorrono a determinare la sufficienza ed adeguatezza della riserva sinistri da riportare in bilancio.

Per poter considerare il risk margin è necessario tenere conto dei rischi che lo determinano:

- rischio di modello: nel caso si utilizzi un modello non adeguato,
- rischio di stima o di parametro: determinato da non corretta stima dei parametri del modello;
- rischio di processo: la variabilità propria del processo che ci accingiamo a rappresentare.

## 3.1 Generalized Linear Model e stima bootstrap del prediction error.

I modelli stocastici di stima della loss reserve hanno il vantaggio di consentire la stima del *prediction error* (o root mean squared error of prediction (RMSEP).

Il prediction error è composto da due quantità distinte: la *variabilità del processo* e la *variabilità della stima.*

Il prediction error è definibile nel modo seguente:

**Prediction Error = (variabilità del processo + variabilità della stima)$^{1/2}$** (7)

In generale considerando una variabile aleatoria $Y$ ed una sua stima $\hat{Y}$ , l'errore quadratico medio di stima è approssimabile, ipotizzando l'***indipendenza*** delle future osservazioni dalle passate (England-Verrall 2002):

$$E\left[(y-\hat{y})^2\right] \approx E\left[(y-E[y])^2\right] + E\left[(\hat{y}-E[\hat{y}])^2\right] \qquad (8)$$

Il prediction error riguarda la variabilità di una previsione, considerando l'incertezza nella stima dei parametri e la variabilità insita nel processo che rappresenta i dati.

Utilizzando i metodi classici di base statistica il tutto si riduce all'individuazione delle due componenti: *varianza del processo* e *varianza della stima.*

Il prediction error è evidentemente di significato più ampio, poiché individua la variabilità della previsione e non solo della stima, che ne è parte integrante.

Verrall ed England (1999) propongono una stima analitica del prediction error della riserva ed indicando con $C_{ij}$ i pagamenti incrementali per i sinistri avvenuti in $i$ e liquidati in $j$, noto dunque il triangolo run off:

| | ***Anno di sviluppo*** | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***Anno di accadimento*** | ***1*** | ***2*** | **…** | ***j*** | **…** | ***n-1*** | ***n*** |
| ***1*** | $C_{11}$ | $C_{12}$ | … | $C_{1j}$ | … | $C_{1n-1}$ | $C_{1n}$ |
| ***2*** | $C_{21}$ | $C_{22}$ | … | $C_{2j}$ | … | $C_{2n-1}$ | |
| **…** | … | … | … | … | | | |
| ***i*** | $C_{i1}$ | … | … | $C_{i,j}$ | | | |
| **…** | … | … | … | | | | |
| ***n-1*** | $C_{n-1,1}$ | $C_{n-1,2}$ | | | | | |
| ***n*** | $C_{n,1}$ | | | | | | |

Il *prediction error* assume la forma seguente:

$$E\left[(C_{ij} - \hat{C}_{ij})^2\right] \cong Var[C_{ij}] + Var[\hat{C}_{ij}] \qquad (9)$$

Tale relazione è valida per i GLMs log-normale, Poisson con sovradispersione e Gamma. Nel secondo membro dell'equivalenza si trova la *varianza del processo* e la *varianza della stima*.

Verrall ed England nel loro lavoro confrontano diversi metodi di stima della riserva sinistri e del prediction error, tra questi il bootstrap.
I metodi proposti considerano i pagamenti incrementali $C_{ij}$ ed hanno in comune il modello proposto da Kremer (1982):

$$\left.\begin{aligned} Y_{ij} &= \log(C_{ij}) \\ Y_{ij} &= m_{ij} + \varepsilon_{ij} \\ Y_{ij} &\approx LN(m_{ij}, \sigma^2) \\ \varepsilon_{ij} &\approx N(0, \sigma^2) \\ m_{ij} &= \eta_{ij} \\ \eta_{ij} &= c + \alpha_i + \beta_j \\ \alpha_1 &= \beta_1 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Il quale considera una classe di modelli log-normali, con errore aleatorio normalmente distribuito a media nulla, omoschedastico. Il limite di tali modelli è l'inapplicabilità in caso di pagamenti incrementali nulli o negativi. I parametri del modello di regressione del previsore lineare sono stimabili con il criterio della massima verosimiglianza o con quello dei minimi quadrati.
La varianza $\sigma^2$ è stimata dalla somma dei quadrati dei residui diviso i gradi di libertà.

Il modello fornisce all'incirca gli stessi risultati della procedura chain ladder, così pure il modello distribution free proposto da Mack (1994) ed il modello seguente.

Il metodo proposto da Reshaw e Verrall (1994) è un GLM, e rappresenta gli incrementi dei pagamenti $C_{ij}$ con una distribuzione logaritmica, *funzione di collegamento,* per il valor medio e l'errore con distribuzione Poisson con sovradispersione in cui:

$$\left.\begin{aligned} &E[C_{ij}] = m_{ij} \\ &Var[C_{ij}] = \phi m_{ij} \\ &\log(m_{ij}) = \eta_{ij} \\ &\eta_{ij} = c + \alpha_i + \beta_j \\ &\alpha_1 = \beta_1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Il metodo è robusto nel caso si incrementi negativi lievi.

Il metodo proposto da Mack (1991) ha una struttura parametrica moltiplicativa per il valore atteso dei $C_{ij}$ che rappresenta con una Gamma, risultando complessa la stima di massima verosimiglianza dei parametri.
Il modello viene rivisitato da Reshaw e Verrall (1994) che lo generalizzano con un GLM, con incrementi dei pagamenti distribuiti come Gamma indipendenti.

$$\left.\begin{aligned} &E[C_{ij}] = m_{ij} \\ &Var[C_{ij}] = \phi m_{ij}^2 \\ &\log(m_{ij}) = \eta_{ij} \\ &\eta_{ij} = c + \alpha_i + \beta_j \\ &\alpha_1 = \beta_1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Successivamente i due autori Verrall ed England propongono di utilizzare la tecnica bootstrap per la stima del prediction error, danno quindi una *versione generalizzata del modello* da cui si ottiene una stima analitica per i prediction errors delle riserve:

$$\left.\begin{aligned} &Var[C_{ij}] = \phi m_{ij}^{p} \\ &Var[\hat{C}_{ij}] \cong \left| \frac{\partial m_{ij}}{\partial \eta_{ij}} \right|^{2} Var[\eta_{ij}] \\ &E[(C_{ij} - \hat{C}_{ij})^{2}] \cong \phi m_{ij}^{p} + m_{ij}^{2} Var[\eta_{ij}] \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Al variare di $p$ si delinea la famiglia di appartenenza per la distribuzione dei pagamenti incrementali $C_{ij}$, ovvero:

- p=0 Normale
- p=1 Poisson
- p=2 Gamma
- p=3 Gaussiana inversa.

Il *prediction error* per la *generazione* dei sinistri accaduti nell'anno *i*-esimo e relativo alla loss reserve

$$C_{i+} = \sum_{j \in \Delta i} C_{ij} \qquad (14)$$

è:

$$E[(C_{i+} - \hat{C}_{i+})^{2}] \cong \sum_{j \in \Delta i} \phi m_{ij}^{p} + \sum_{j \in \Delta i} m_{ij}^{2} Var[\eta_{ij}] + 2 \sum_{\substack{j_1, j_2 \in \Delta \\ j_1 < j_2}} m_{ij_1} m_{ij_2} Cov[\eta_{ij_1} \eta_{ij_2}] \qquad (15)$$

La loss reserve complessiva da stimare è :

$$C_{++} = \sum_{i, j \in \Delta} C_{ij} \qquad (16)$$

il suo *prediction error* è approssimabile come segue:

$$E[(C_{++} - \hat{C}_{+i+})^2] \cong \sum_{i,j\in\Delta} \phi m_{ij}{}^{p} + \sum_{i,j\in\Delta} m_{ij}^2 Var[\eta_{ij}] + 2 \sum_{\substack{j_1, j_2 \in\Delta \\ i_1, i_2 \in\Delta \\ i_1, j_1 \neq i_2, j_2}} m_{i_1 j_1} m_{i_2 j_2} Cov[\eta_{ij_1} \eta_{ij_2}] \qquad (17)$$

La difficoltà di ricorrere ad una stima analitica per la formalizzazione del prediction error porta i due autori a proporre per tale scopo la tecnica del *bootstrap*. Infatti tale prediction error si riferisce alla somma di variabili aleatorie.

Un altro dei vantaggi del bootstrap è che è possibile lavorare in due modi diversi:

1. *Paired bootstrap*: effettuando il ricampionamento dai dati osservati
2. *Residual bootstrap*: effettuando il ricampionamento dai residui.

L'utilizzo di modelli GLM comporta la scelta di ricampionare i residui, quindi scelto un modello di stima della riserva, occorre scegliere una forma adeguata di residui da ricampionare.

A tale scopo occorre ricordare che:

a) il ricampionamento è fatto in base all'ipotesi che i residui siano indipendenti ed identicamente distribuiti.
b) è indifferente ricampionare i residui o i residui moltiplicati per una costante

La prima alternativa risulta essere una metodologia più robusta della seconda, ma nel caso della stima delle riserve sinistri il primo tipo di approccio non è auspicabile, poiché esiste dipendenza tra i parametri stimati ed alcune osservazioni.

Quindi per utilizzare il bootstrap è necessario:

A. scegliere un modello di stima della riserva sinistri
B. scegliere un'adeguata misura dei residui

Verrall ed England utilizzano il *bootstrap dei residui*, quindi è importante la scelta di una tipologia di residui adatta ai modelli GLM utilizzati come base teorica del modello.

Sono proposti a tal fine i *residui* della devianza, i residui di Pearson ed quelli di Anscombe.

$$
\left.
\begin{aligned}
r_D &= sign(C-m)\sqrt{2(C\log(C/m)-C+m} \\
r_P &= \frac{C-m}{\sqrt{m}} \\
r_A &= \frac{\frac{3}{2}(C^{2/3}-m^{2/3})}{m^{1/6}}
\end{aligned}
\right\} \qquad (18)
$$

I residui scelti da Verrall ed England sono i residui di Pearson; si calcola il *parametro di scala* , questo per tener conto dei parametri presenti nel modello di fitting nel calcolo del prediction error (chi-quadro di Pearson diviso per i gradi di libertà (n numero dati, p numero di parametri))

$$
\phi_P = \frac{\sum r_P^2}{n-p} \qquad (19)
$$

Il bootstrap, come visto in precedenza consiste in un ricampionamento, estraendo con ripetizione dai dati in possesso all'operatore, in tal caso vengono replicati i residui di Pearson. Attraverso l'inversione dell'espressione dei residui di Pearson si ottengono i pagamenti incrementali simulati con bootstrap C*.

$$
C^* = r_P^*\sqrt{\hat{m}} + \hat{m} \qquad (20)
$$

La procedura viene ripetuta un certo numero di volte, ottenendo ogni volta un triangolo di residui ed un triangolo di pagamenti incrementali da cui stimare la riserva.

Si ottiene in tal modo *una predictive distribution della riserva sinistri* da cui ricavare le statistiche necessarie alla piena conoscenza del processo, quali il valor medio ed il prediction error.

Il *bootstrap prediction error* è:

$$PE_{bs} = \sqrt{\phi_P R + \frac{n}{n-p}(SE_{bs}(R))^2} \qquad (21)$$

Dove $R$ è la riserva totale ed $SE_{bs}$ è l'errore bootstrap della riserva stimata, $\phi_P R$ è la varianza di processo ed è calcolata analiticamente.

La metodologia proposta da England e Verrall (1999) è riassumibile in una serie di passi:

1. Dal run-off dei pagamenti cumulati si calcolano i fattori di sviluppo del metodo Chain Ladder

2. Si ottengono i pagamenti cumulati stimati come dal modello proposto

3. Si calcolano i pagamenti incrementali per differenza

4. Si calcolano i residui di Pearson

5. Si calcola il parametro di scala di Pearson

6. Si aggiusta il parametro di scala di Pearson per poter confrontare i risultati con quelli ottenuti analiticamente

$$r_P = \sqrt{\frac{n}{n-p}}\frac{C-m}{\sqrt{m}} \qquad (22)$$

7. Si itera il procedimento di simulazione bootstrap sul run-off dei residui di Pearson

8. Attraverso la formula si ottengono i pagamenti incrementali con stima bootstrap

$$C^* = r_P^* \sqrt{\hat{m}} + \hat{m} \qquad (23)$$

9. Si stimano dunque le riserve

10. Il punto 7 si itera per N=1000 volte

11. Si determina la media delle stime delle riserve sinistri cosi e la si confronta con quella ottenuta dal chain ladder

*12.* L*'errore standard* delle 1000 iterazioni effettuate della stima *bootstrap è una stima del prediction error*

La procedura di stima bootstrap produce *una distribuzione dei valori attesi dei triangoli futuri*, l'errore di processo è replicato dal campionamento dalla distribuzione sottostante e condizionatamente a tali medie (England 2002).

## 3.2 La politica liquidativa nella Dynamic Financial Analisis[1] utilizzando il bootstrap

La rappresentazione della diagonale dei pagamenti incrementali ci da l'idea del cash flow annuo che rappresenta i pagamenti. Ma cosa sono e da cosa dipendono questi pagamenti? Traggono la loro origine da sinistrosità e costo di ciascuna generazione, ma si realizzano nel tempo in virtù della variabile *politica liquidativa*.

Tale variabile rimane determinata da politiche gestionali, ma anche dalla tipologia di sinistri che le riserve in questione riguardano. I sinistri con danni fisici riguardano questioni complesse, di valutazione di danni fisici e morali, valutazioni espresse spesso sotto l'egida di un foro competente.

L'idea è di integrare la considerazione della variabile politica liquidativa al modello di Dynamic Financial Analisis (Kaufman Garmer e Klet, 1999). Ciò è fatto in concomitanza con l'utilizzo, nell'ambito del modello stesso, dei modelli lineari generalizzati, per dare una rappresentazione stocastica della stima della riserva sinistri, differente da quello che i tre autori propongono.

Considerati diversi possibili GLMs , stimati i parametri, è possibile ricavare i valori fit. È possibile fare almeno due tipologie di analisi:

---

[1] Ciminelli, Binnella " La Dynamic Financial Analysis. Aspetti introduttivi e possibili applicazioni." Quaderno di dipartimento di Scienze Attuariali e Finanziarie n.33, anno XIII, Università "La Sapienza" di Roma 2008

- Considerare la diagonale principale del triangolo run off confrontando i pagamenti con i valori fit ottenuti da diversi modelli di stima della riserva sinistri
- Considerare come ciascuna generazione si smonta in termini percentuali rispetto a ciò che il metodo di stima individua per la riserva sinistri totale.

Attraverso la DFA, considerando diversi istanti di valutazione, possiamo procedere a due tipologie di analisi:

1. Siamo ad inizio esercizio, simuliamo il possibile futuro andamento della politica liquidativa e quindi dei pagamenti e ne valutiamo l'impatto finanziario in termini di risultato possibile a fine esercizio.
2. Siamo a fine esercizio confrontiamo l'applicazione di diverse tipologie di stima della riserva sinistri e ne valutiamo l'impatto in termini di differente politica liquidativa attraverso l'output del modello di Kaufman, Garmer e Kett.

# 4 Un esempio

Consideriamo tre diversi GLMs di seguito descritti nella tabella.

| **GLM** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **model** | **family** | **link** | **Null deviance** | **df** | **$\phi$** |
| 1 | Gaussian | log | 3.9317e+15 | 54 | 8.0668e+01 |
| 2 | Poisson | log | 463675585 | 54 | 1 |
| 3 | Gamma | log | 8.0668e+01 | 54 | 0.05378849 |

Tabella n.1:GLMs utilizzati con indicazione della family, del link, della devianza, dei gradi di libertà e del parametro di dispersione

Ipotizzando noto il triangolo run off dei pagamenti incrementali del ramo RcAuto, di un'ipotetica compagnia di assicurazioni in un ipotetico esercizio *t*, con l'ausilio del software R abbiamo proceduto alle stime dei parametri, ottengono i valori di stima delle loss reserves riportati nella tabella di seguito.

| generazione | GLM1 | GLM2 | GLM3 | Chain-ladder |
|---|---|---|---|---|
| **2** | 377.185 | 1.217.412 | 442.666 | 413.489 |
| **3** | 1.482.397 | 2.422.538 | 1.688.234 | 1.426.149 |
| **4** | 4.011.393 | 2.959.490 | 3.251.618 | 3.267.400 |
| **5** | 7.981.385 | 6.111.446 | 7.157.937 | 6.815.724 |
| **6** | 10.617.375 | 8.999.993 | 9.752.723 | 9.734.923 |
| **7** | 9.972.954 | 9.643.397 | 28.329.444 | 10.321.793 |
| **8** | 14.802.108 | 7.290.245 | 11.923.886 | 15.342.788 |
| **9** | 27.397.443 | 15.725.300 | 38.453.383 | 25.454.198 |
| **10** | 47.515.495 | 23.965.541 | 61.171.662 | 46.417.437 |
| **Riserva Sinistri** | 124.157.735 | 78.335.363 | 162.171.555 | 119.193.902 |
| **Prediction Error** | 0,1468 | 0,1421 | 0,1468 | - |
| **Apparent Error** | 0,1739 | 0,1739 | 0,1739 | - |

Tabella n.2: Stima della Riserva Sinistri, del Prediction Error e dell'Apparent Error utilizzando i GLMs della tabella precedente ed il Chain ladder (valori in €).

Consideriamo i pagamenti effettuati ottenuti come valori fit nei GLMs da cui siamo partiti. Da tali valori si può procede analizzando i pagamenti come variabile anch'essa da stimare, in un'ottica di DFA.

L'obiettivo è quello di dare una rappresentazione formale alla *variabile politica liquidativa di un determinato esercizio*. L'excursus passa per i modelli che consentono di individuare la *predittive distribution* per la stima della riserva sinistri. Infatti se l'analisi è fatta per stimare la riserva sinistri siamo temporalmente nell'istante, dell'esercizio generico, successivo ai pagamenti in oggetto, ma se l'analisi è posta temporalmente ad inizio esercizio, i pagamenti dell'esercizio risulteranno essere una variabile sconosciuta.

La politica liquidativa è una delle componenti che determinano in modo decisivo il processo di smontamento della riserva. Le metodologie di stima delle riserve sinistri, siano esse deterministiche o stocastiche, non parlano di tale variabile, ma in modo implicito ne ipotizzano un andamento, che da luogo, congiuntamente ad altri fattori, alla stima stessa della riserva.

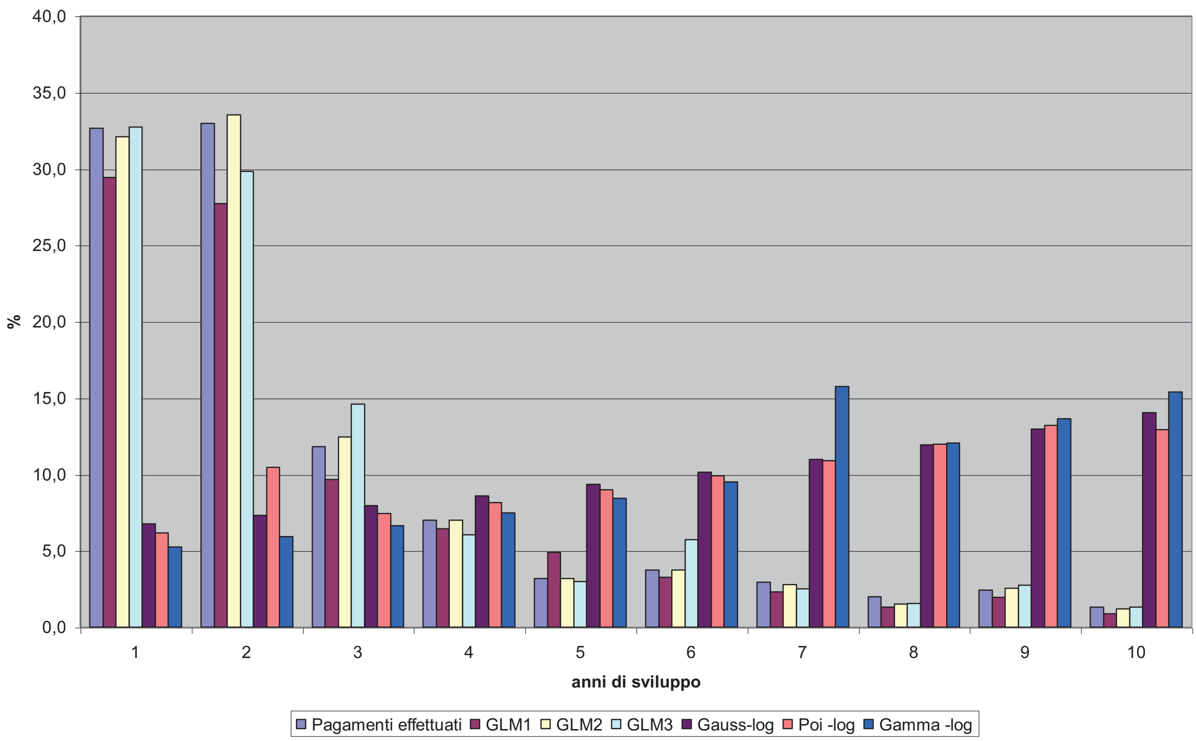


Grafico n.1:Rappresentazione grafica della percentuale dei pagamenti sul totale di ciascuna generazione, nei rispettivi GLMs utilizzati per stimare la Riserva Sinistri

Nei primi due anni di sviluppo i tre modelli danno i valori più elevati, ben oltre il 25%, per poi decrescere nel tempo. Ciò non è altrettanto vero per gli stessi modelli applicati alle generazioni, infatti questi tendono a livellare la politica liquidativa nei singoli anni di sviluppo attestandosi su valori sempre al disotto del 20%, in ciascun anno di sviluppo. È interessante vedere cosa accade in particolare alla fine dell'esercizio, confrontando graficamente le percentuali dei pagamenti effettuati e quelle dei pagamenti che si avrebbero considerando i GLM 1, 2, 3 e gli stessi applicati alle singole generazioni.

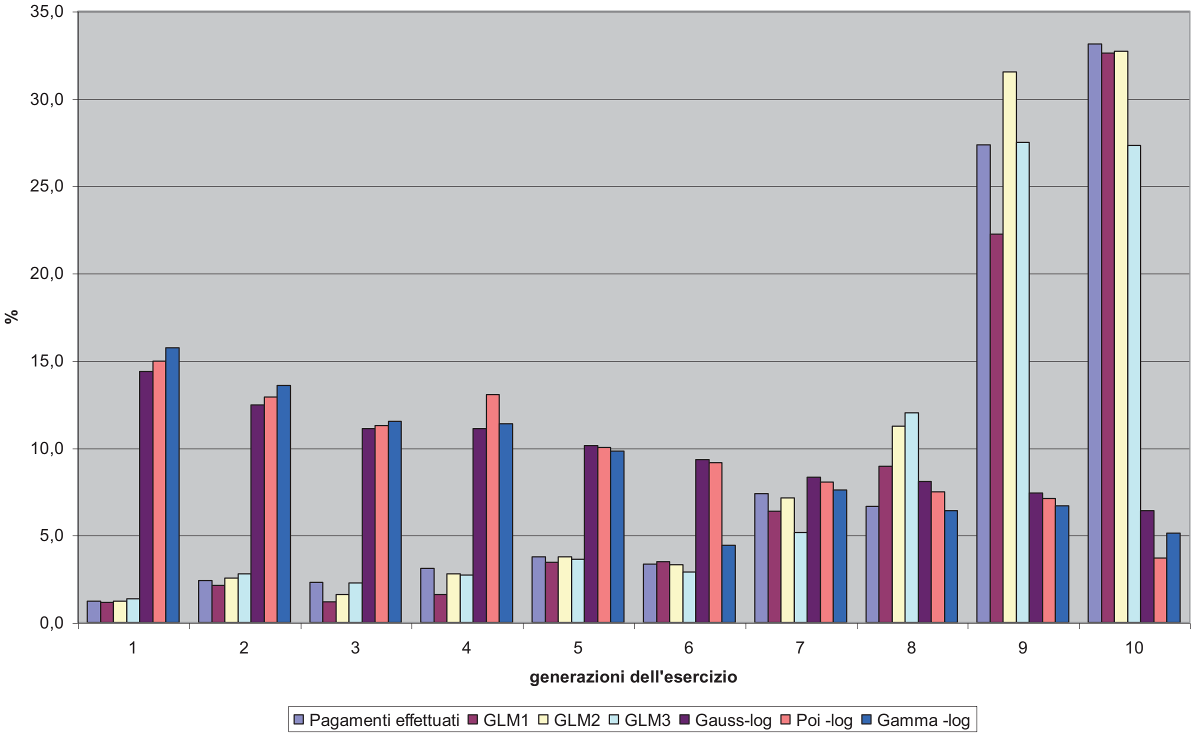


Grafico n.2:Rappresentazione grafica della percentuale dei pagamenti sul totale di ciascuna generazione, relativamente all'esercizio in esame, ottenute e stimate con i rispettivi GLMs.

| generazioni | GLM1 | GLM2 | GLM3 | Gauss-log | Poi-log | Gamma-log |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0,0 | 0,0 | 0,0 | 76,2 | 59,5 | 41,4 |
| **2** | 2,4 | 0,1 | 0,1 | 26,4 | 21,1 | 14,7 |
| **3** | -27,1 | - 0,3 | - 0,3 | 5,5 | - 2,6 | - 14,5 |
| **4** | - 9,9 | - 0,1 | - 0,1 | - 14,7 | - 18,0 | - 21,7 |
| **5** | - 0,9 | 0,0 | 0,1 | - 28,9 | - 30,4 | - 31,7 |
| **6** | 4,0 | 0,0 | - 0,1 | - 23,8 | - 24,9 | - 24,8 |
| **7** | 0,0 | - 0,1 | - 0,1 | - 2,7 | - 2,1 | 0,8 |
| **8** | 78,1 | 0,7 | 0,6 | 75,3 | 77,7 | 82,0 |
| **9** | - 93,9 | 0,2 | 0,2 | 19,5 | 23,3 | 30,5 |
| **10** | 100,0 | 0,0 | 0,0 | 16,7 | 21,0 | 28,2 |
| **totale** | 12,3 | 0,1 | 0,1 | 15,7 | 18,2 | 23,3 |

Tabella n.3: Scostamenti percentuali tra i pagamenti effettuati a fine esercizio ed i pagamenti stimati con i GLMs.

Questi risultati meritano almeno due osservazioni, la prima è che cambiando modello implicitamente la politica liquidativa cambia, secondo, ma non per importanza, è che lo stesso modello applicato al triangolo o alle singole generazioni ipotizzate tra loro indipendenti porta a risultati differenti in diverse direzioni.

La riserva sinistri è infatti pensabile dinamicamente, come la successione di ammontari da cui, nel tempo, saranno prelevati quei pagamenti rappresentati nelle diagonali del triangolo run off. La successione nel tempo delle diagonali che dividono in due triangoli le tabelle dei pagamenti, è di anno in anno determinata da:

a) l'uscita della più vecchia generazione di sinistri,
b) l'entrata di una nuova generazione,
c) l'aumentare di un anno di sviluppo per ciascuna generazione,
d) la politica che l'impresa si propone di realizzare in merito alla liquidazione dei sinistri.

Il punto a) potrebbe non essere certo, si teorizza infatti sulla coda della generazione; il punto b) è un punto di duplice incertezza poiché non sappiamo come si comporterà la generazione in termini di frequenza e costo medio del sinistro.

Il punto c) è solo una logica conseguenza del trascorrere del tempo, mentre il punto d) può essere nodale, infatti risulta essere una variabile decisionale.

# 5 Considerazioni

Il vantaggio primario del bootstrap è che elimina le difficoltà analitiche, consentendo una facilità di implementazione. Tuttavia date le ipotesi di lavoro dell'applicazione standard del bootstrap, ovvero *l'indipendenza e l'identicità di distribuzione per le variabili da simulare*, tale metodo va applicato ai residui nel caso di modelli di regressione che prevedono l'indipendenza, ma non l'identica distribuzione. È fondamentale quindi la definizione dei residui; ad esempio per il Chain Ladder e per l'Overd –dispersed Poisson si utilizzano i residui di Pearson.

Inoltre il bootstrap individua una predictive distribution della loss reserve e la loss reserve per sinistri IBNR.

La variabilità che riguarda le stime dei parametri e la bontà di adattamento del modello (England e Verrall 1998) va stimata ed è qui che il bootstrap interviene.

Un modello probabilistico è appropriato se restituisce la distribuzione della riserva che rifletta la variabilità del processo dei pagamenti e l'errore di stima dei parametri.

I punti da tenere chiari prima di teorizzare e valutare l'applicabilità di un modello, sono:

- la presenza di diverse *componenti* di natura aleatoria che concorrono alla necessità di appostare a riserva
- la possibilità che tali processi siano tra loro legati da forme di *dipendenza*
- *la valenza* formale e *teorica* del modello
- *la correttezza della stima che produce*
- la *variabilità* insita nel processo riserva sinistri e la sua composizione (Mack)
- la concreta possibilità che il modello sia non solo elegante formalmente, ma utilizzabile dai colleghi attuari.

La considerazione di diversi *metodi di stima* per la riserva sinistri implica la formulazione di ipotesi diverse, tra queste vi è, se pur implicitamente, la considerazione di *politiche liquidative* che vedono il processo di smontamento della riserva evolversi in modo differenziato. Il modello, oltre che inadeguato per rappresentare i dati, può risultare inadeguato a rappresentare la politica liquidativa e da ciò, nell'esercizio immediatamente successivo a quello di stima della riserva, quindi in ottica di analisi dei cash flows, potrebbe compromettere la solvibilità o esporre l'impresa a rischi aggiuntivi ed ingiustificati.

## REFERENCES


Binnella,C. (2008) "Il Bootstrap e la Dynamic Financial Analysis. Alcune applicazioni alla riserva sinistri ed alla politica liquidativa." Tesi di Dottorato in Scienze Attuariali .

Binnella, Cimimelli (2008)"La Dynamic Financial Analysis. Aspetti introduttivi e sue possibili applicazioni" Quaderno di dipartimento di Scienze Attuariali n.33 anno XII.

Centeno, Silva, Pinheiro (2000) "Bootstrap Methodology in Claim Reserving"

Efron, Tibshirani (1998) "An Introduction to the Bootstrap"

England (2002) "Addendum to "Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving""

England, Verrall (1999) "Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving"

England ,Verrall "STOCHASTIC CLAIMS RESERVING IN GENERAL INSURANCE" [Presented to the Institute of Actuaries, 2002]

De Felice, Moriconi (2003) "Risk Based Capital in P&C Loss Reserving or Stressing the Triangle"

Ostaszewski Rempala (2000) "Parametric and Nonparametric Bootstrap in Actuarial Practice" - University of Louisville

Taylor (2000) "Loss reserving. An Actuarial Perpespective"