

# Calibrazione di un modello alla Duffie & Singleton mediante l'applicazione del Particle Filter.

Andrea Spadaro  
Sapienza Università di Roma,  
Dipartimento di Scienze Statistiche  
andrea.spadaro@uniroma1.it

## Abstract

L'entrata in vigore di *Solvency II* richiede alle compagnie di assicurazione di disporre di un livello di fondi propri almeno pari al cosiddetto *Solvency Capital Requirement* (SCR). Si evidenzia la necessità di utilizzare tecniche di calibrazione basate su serie storiche di quotazioni di mercato che consentono di elicitarne i parametri dei modelli per la misura di probabilità *naturale* e quella *risk-neutral*.

Si propone un'applicazione del calcolo del SCR per il rischio di spread in logica modello interno utilizzando un modello *à la* Duffie e Singleton e la tecnica nota come *particle filtering* come strumento per la stima.

**Keywords:** Solvency II, Modello Interno, Rischio Spread, Duffie & Singleton, Particle Filter

## Introduzione

Con l'entrata in vigore della Direttiva Quadro 2009/138/UE, nota come *Solvency II*, alle compagnie di assicurazione è richiesto di disporre di un livello di fondi propri almeno pari al cosiddetto *Solvency Capital Requirement* (SCR). Nella normativa il SCR è definito come il *Value-at-Risk* (VaR) della distribuzione ad un anno dei *Basic Own Funds* (BOF) dell'impresa con un livello di probabilità del 99.5%; sono inoltre proposte diverse metodologie di calcolo tra cui la *Standard Formula*, che prevede un modello predefinito e calibrato sulla base di dati relativi al mercato assicurativo europeo, e il "modello interno" che le compagnie sviluppano in modo da rappresentare il più accuratamente possibile il loro profilo di rischio.

Le valutazioni richieste dalla Direttiva comportano il calcolo dei valori "market consistent" delle attività e delle passività dell'impresa. A tal fine si rende necessario l'utilizzo di modelli basati sulla dinamica stocastica dei fattori di rischio che influenzano il valore dei BOF. Coerentemente ai principi della Direttiva la valutazione dei

BOF si effettua utilizzando le probabilità *risk neutral* sotto le ipotesi di assenza di arbitraggio e completezza del mercato. D'altra parte per il calcolo del SCR occorre disporre delle distribuzioni di probabilità *real world* dei fattori di rischio. Pertanto si evidenzia la necessità di utilizzare tecniche di calibrazione basate su serie storiche di quotazioni di mercato che consentono di elicitarne entrambe le misure di probabilità.

Nel più ampio contesto dei rischi di mercato, in questo lavoro viene analizzato il rischio di spread definito come: “*la sensibilità del valore delle attività, delle passività e degli strumenti finanziari a variazioni del livello o della volatilità degli spread di credito rispetto alla struttura per scadenze dei tassi di interesse privi di rischio*” [1].

Per valutare il rischio spread si è scelto di utilizzare un modello *in forma ridotta* à la Duffie & Singleton in [2], adottando una formulazione che lega la misura *real world* a quella *risk neutral* mediante un premio per il rischio *esteso* [5]. Tale scelta è stata fatta per migliorare la capacità del modello di riprodurre l'andamento delle serie storiche dei prezzi osservati sul mercato.

La stima dei parametri del modello per il rischio spread è effettuata utilizzando la tecnica della massima verosimiglianza, ovvero:

$$\max_{\theta \in \Omega_\theta} \mathcal{L}(\theta) \tag{1}$$

dove  $\theta$  è il vettore dei parametri del modello,  $\Omega_\theta$  è il supporto dei parametri e la funzione di verosimiglianza è calcolata utilizzando la tecnica nota come *particle filtering*. La rappresentazione *state-space* e le tecniche di filtraggio sono utilizzate nella *best-practice* finanziaria e ampiamente descritte in letteratura, in particolare (si rimanda a [4] e [11], per gli aspetti finanziari; a [10], [9] per le questioni di metodo). Questa metodologia risponde alle prescrizioni della Direttiva consentendo la stima congiunta dei parametri *real world* e di quelli *risk neutral*.

Il lavoro è strutturato come segue: la sezione (1) è dedicata alla definizione delle grandezze finanziarie utilizzate nel processo di calibrazione e la loro rappresentazione teorica attraverso il modello à la Duffie & Singleton utilizzato; nella sezione (2) viene presentato il *particle filtering* e la relativa applicazione al modello scelto; nella sezione (3) i risultati della fase di calibrazione sono misurati confrontando alcune statistiche relative alla serie storica dei di mercato e di modello; la qualità dell'esito del processo di calibrazione è indagata sia in termini di bontà di adattamento sui dati storici utilizzati nella stima sia in termini di valore di alcune grandezze finanziarie rilevanti nel contesto di Solvency 2.

## 1 Il modello per lo spread di credito.

In questa Sezione viene presentato il modello per il rischio spread utilizzato in questo lavoro. Nel paragrafo 1.1 vengono presentati il prezzo di uno *zero coupon*

*bond* (ZCB) rischioso e la relativa struttura di spread creditizi espressa in termini di differenziale d'intensità di interesse. Infine, nel paragrafo 1.2, tali grandezze sono inserite nel contesto del modello *à la* Duffie & Singleton utilizzato.

### 1.1 Pricing in presenza di rischio di credito.

Sia  $v(t, s)$  il valore al tempo  $t$  di uno ZCB risk-free unitario e  $v^R(t, s)$  il valore al tempo  $t$  di un analogo ZCB rischioso, emesso da un emittente con rating R, con scadenza  $s$  e condizionatamente al non fallimento dell'emittente in  $[0, t]$ . L'intensità di rendimento a scadenza (*yield to maturity*) risk-free e rischiosa per la scadenza  $s$  sono date da:

$$h(t, s) = -\frac{1}{s-t} \log v(t, s), \quad h^R(t, s) = -\frac{1}{s-t} \log v^R(t, s),$$

analogamente lo spread creditizio, espresso in termini di intensità, è:

$$\sigma^R(t, s) := h^R(t, s) - h(t, s). \quad (2)$$

La struttura di spread creditizi al tempo  $t$  è data da:

$$\sigma_t^R(\mathbf{s}_t) := \{\sigma^R(t, s_{t,1}), \dots, \sigma^R(t, s_{t,m})\}, \quad (3)$$

essendo  $\mathbf{s}_t = \{s_{t,1}, \dots, s_{t,m}\}$  e  $s_{t,k}$  la vita residua a scadenza  $k$ . Nelle ipotesi modellistiche adottate,  $v^R(t, s)$  è dato da [2]:

$$v^R(t, s) = \mathbf{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^s r_u du} \mathbb{I}_{\{\tau > s\}} \middle| \mathcal{G}_t \right] + \mathbf{E}^{\mathbb{Q}} \left[ g(\tau) e^{-\int_t^\tau r_u du} \mathbb{I}_{\{\tau \leq s\}} \middle| \mathcal{G}_t \right], \quad (4)$$

dove  $\tau$  è l'istante di default,  $\mathbb{I}_{\{A\}}$  è la funzione indicatrice dell'evento  $A$ ,  $g(\tau)$  è il valore del contratto in caso di default, il tutto definito nello spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{G}_t, \mathbb{Q})$  dove  $\mathcal{G}_t$  è la filtrazione contenente le informazioni sul mercato ed il default. Ipotizzando che  $g(\tau)$  sia una frazione deterministica  $\delta$  (*Recovery Rate*) del valore dell'obbligazione nell'istante immediatamente precedente il default:

$$g(\tau) = \delta \times v^R(\tau^-, s), \quad \delta \in [0, 1],$$

il prezzo (4) diventa:

$$v^R(t, s) = \mathbf{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^s [r_u + (1-\delta)\lambda_u] du} \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad (5)$$

dove  $\lambda_t$  è l'intensità di default e  $\mathcal{F}_t$  è la filtrazione contenente le sole informazioni di mercato.

Supponendo indipendenza tra il rischio di tasso d'interesse e quello di spread la (5) diventa:

$$v^R(t, s) = v(t, s) \underbrace{\mathbf{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-(1-\delta) \int_t^s \lambda_u du} \middle| \mathcal{F}_t \right]}_{Q(t,s)}, \quad (6)$$

## 1.2 Il modello *à la* Duffie & Singleton.

Il modello utilizzato è una versione unidimensionale del modello inizialmente proposto da Duffie & Singleton in [2].

La dinamica naturale dell'intensità di default  $\lambda_t$  è descritta da:

$$d\lambda_t = \alpha(\gamma - \lambda_t)dt + \rho\sqrt{\lambda_t}dZ_t^{\mathbb{P}}, \quad \lambda_{t_0} = \lambda_0, \quad (7)$$

il cambio di misura è effettuato utilizzando un premio al rischio *esteso*:

$$\pi(t, \lambda_t) = \pi_1 \frac{\sqrt{\lambda_t}}{\rho} + \pi_2 \frac{1}{\rho\sqrt{\lambda_t}}, \quad (8)$$

da cui si ricava la dinamica *risk-neutral*, ovvero:

$$d\lambda_t = \hat{\alpha}(\hat{\gamma} - \lambda_t)dt + \rho\sqrt{\lambda_t}dZ_t^{\mathbb{Q}}, \quad \lambda_{t_0} = \lambda_0, \quad (9)$$

dove

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \alpha + \pi_1 \\ \hat{\gamma} &= \frac{\alpha\gamma - \pi_2}{\hat{\alpha}}. \end{aligned}$$

La (7) e (9) implicano che le probabilità di transizione naturale e *risk-neutral* per  $\lambda_{t+\Delta t}|\lambda_t$  sono descritte da una distribuzione di tipo chi-quadro non centrato, il cui parametro di non centralità dipende dal valore di  $\lambda_t$  rendendo il processo non stazionario, [13]:

$$p(\lambda_{t+\Delta t}|\lambda_t) \sim \chi_{nc}^2(\lambda_{t+\Delta t}; 2\nu, \mu(\lambda_t)), \quad (10)$$

con

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{2\alpha\gamma}{\rho^2} \\ \mu(\lambda_t) &= \lambda_t \frac{4\alpha e^{-\alpha\Delta t}}{(1 - e^{-\alpha\Delta t})\rho^2}, \end{aligned}$$

e parametri rispettivamente naturali e neutrali al rischio. Secondo questa impostazione, esiste una formula chiusa per  $Q(t, s)$  data da [7]:

$$Q(t, s) = \mathbf{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-(1-\delta)\int_t^s \lambda_u du} \middle| \mathcal{F}_t \right] = A(T)e^{-B(T)(1-\delta)\lambda_t}, \quad T = s - t \quad (11)$$

dove:

$$\begin{aligned} A(x) &= \left[ \frac{2d e^{\frac{\hat{\alpha}+d}{2}x}}{(\hat{\alpha}+d)(e^{dx}-1)+2d} \right]^{\nu}, \\ B(x) &= \frac{2(e^{dx}-1)}{(\hat{\alpha}+d)(e^{dx}-1)+2d}, \\ d &= \sqrt{\hat{\alpha}^2 + 2(1-\delta)\rho^2}, \end{aligned}$$

da cui il corrispettivo valore di modello per la (2) è dato da:

$$\sigma^{R,M}(t, s) = A'(T) + B'(T)(1 - \delta)\lambda_t, \quad T = s - t, \quad (12)$$

con:

$$\begin{aligned} A'(x) &= -\frac{1}{x} \log A(x), \\ B'(x) &= \frac{1}{x} B(x), \end{aligned}$$

da cui si può ricavare la struttura di spread di modello al tempo  $t$  per il vettore di scadenze  $\mathbf{s}_t = \{s_{t,1}, \dots, s_{t,m}\}$  è dato da:

$$\sigma_t^{R,M}(\mathbf{s}_t) := \{\sigma^{R,M}(t, s_{t,1}), \dots, \sigma^{R,M}(t, s_{t,m})\}. \quad (13)$$

## 2 Il Particle Filter

Questa Sezione è dedicata alla presentazione alle *tecniche di filtraggio*, in particolare nel paragrafo 2.1 viene presentato l'algoritmo del filtro che permette di calcolare il valore della verosimiglianza (1):

$$\mathcal{L}(\theta) = p_\theta(\sigma_{1:T}^R) = \prod_{t=1}^T p_\theta(\sigma_t^R | \sigma_{1:t-1}^R), \quad (14)$$

mediante l'applicazione ricorsiva del *Teorema di Bayes* a tutte le coppie di date della serie storica di osservazioni.

Nel paragrafo 2.2 le *tecniche di filtraggio* saranno applicate al modello *à la* Duffie & Singleton utilizzato nel lavoro.

### 2.1 Aspetti teorici.

La tecnica del *Particle Filter* può essere collocata nell'ambito degli *state-space models*, anche noti come *Hidden Markov Models* (HMM), in cui sono definite:

1. una *variabile di stato* multidimensionale,  $\{\mathbf{x}_t; t \in \mathbb{N}\}$ ,  $\mathbf{x}_t \in \mathcal{X}$ , non osservabile, che si ipotizza seguire un processo *markoviano*;
2. una *variabile osservabile* multidimensionale,  $\{\mathbf{y}_t; t \in \mathbb{N}\}$ ,  $\mathbf{y}_t \in \Upsilon$ , le cui realizzazioni, condizionatamente al valore di  $\mathbf{x}_t$ , sono tra loro indipendenti.

Definendo:

$$\begin{aligned} \text{in } t = 0 & \quad p_\theta(\mathbf{x}_0) \\ \text{per } t \geq 1 & \quad p_\theta(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}) \quad (\text{equazione di stato}) \\ \text{per } t \geq 1 & \quad p_\theta(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t) \quad (\text{equazione di misura}) \end{aligned} \quad (15)$$

dove  $p_\theta(\mathbf{x}_0)$  è la distribuzione (in logica bayesiana *a priori*) del valore della variabile di stato all'istante iniziale,  $p_\theta(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1})$  è la probabilità di transizione dall'istante  $t - 1$  all'istante  $t$ , e  $p_\theta(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t)$  è la verosimiglianza dell'osservazione. L'*equazione di stato* descrive la dinamica del sistema, mentre l'*equazione di misura* descrive la relazione tra la variabile latente e quella osservata. La procedura ricorsiva che permette di costruire la verosimiglianza aggiornando la conoscenza della distribuzione di probabilità della variabile di stato è espressa dall'equazione:

$$p_\theta(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t}) = \frac{p_\theta(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t) p_\theta(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t-1})}{\int_{\Omega_x} p_\theta(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t) p_\theta(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t-1}) d\mathbf{x}_t}, \quad (16)$$

dove  $p_\theta(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t)$  è la verosimiglianza dell'osservazione di  $\mathbf{y}_t$  condizionatamente al valore della variabile di stato  $\mathbf{x}_t$  allo stesso istante, mentre

$$p_\theta(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t-1}) = \int_{\Omega_x} p_\theta(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}) p_\theta(\mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{y}_{1:t-1}) d\mathbf{x}_{t-1}, \quad (17)$$

è la distribuzione di  $\mathbf{x}_t$  sulla base dell'informazione disponibile in  $t - 1$ , e

$$p_\theta(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_{1:t-1}) = \int_{\Omega_x} p_\theta(\mathbf{y}_t | \mathbf{x}_t) p_\theta(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t-1}) d\mathbf{x}_t. \quad (18)$$

è la costante che permette di calcolare in modo ricorsivo la verosimiglianza (1), ovvero:

$$\mathcal{L}(\theta) = \prod_{t=1}^T p_\theta(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_{1:t-1}). \quad (19)$$

La coppia di equazioni (16) e (17) permette di calcolare  $p_\theta(\mathbf{x}_t | \mathbf{y}_{1:t})$  a partire da  $p_\theta(\mathbf{x}_{t-1} | \mathbf{y}_{1:t-1})$ , e quindi di utilizzare una procedura ricorsiva iniziata da  $p_\theta(\mathbf{x}_0)$  (ovvero  $p_\theta(\mathbf{x}_0 | \mathbf{y}_0 = \emptyset)$ ).

Nel caso in cui tutte le distribuzioni sono di tipo *gaussiano* e sussiste una relazione lineare tra la variabile osservata e quella latente, allora esistono soluzioni in forma chiusa alle equazioni ricorsive e la metodologia prende il nome di *Filtro di Kalman*; se invece gli integrali devono essere calcolati con tecniche numeriche la metodologia prende il nome di *Particle Filter*.

## 2.2 Implementazione del modello.

In questo lavoro la variabile di stato è rappresentata dall'intensità di default  $\lambda(t)$  mentre la variabile osservata è lo spread  $\sigma^R(t, s)$  definito dalla (12).

Dalla (10) si nota che la distribuzione dell'*equazione di stato* è di tipo chi-quadro non centrato. Ipotizzando per l'*equazione di misura* una distribuzione di tipo *gaussiana*, si ha:

$$p\left(\sigma_t^R(\mathbf{s}) | \lambda_t\right) \sim N\left(\sigma_t^R(\mathbf{s}); \sigma_t^{R,M}(\mathbf{s}), \Sigma\right), \quad (20)$$

dove  $\Sigma$  è una matrice di varianze e covarianze diagonale di parametro costante  $\omega^2$ . Dalle (10) e (20) si nota che non esiste primitiva per gli integrali (17) e (18) e pertanto devono essere risolti per via numerica. Poichè gli integrali sono unidimensionali si è ricorso all'utilizzo della tecnica di quadratura di Gauss-Legendre con  $n = 256$  punti (o *nodi*) appartenenti all'intervallo  $[0, 0.1]$ .

Le equazioni ricorsive del filtro sono pertanto:

$$\hat{p}_\theta\left(\lambda_t^i | \sigma_{1:t-1}^R(\mathbf{s}_t)\right) = \sum_{k=1}^n p_\theta\left(\lambda_t^i | \lambda_{t-1}^k\right) \tilde{p}_\theta\left(\lambda_{t-1}^k | \sigma_{1:t-1}^R(\mathbf{s}_t)\right) w^k, \quad (21)$$

e

$$\tilde{p}_\theta\left(\lambda_t^i \mid \sigma_{1:t}^R(\mathbf{s}_t)\right) = \frac{p_\theta\left(\sigma_t^R(\mathbf{s}_t) \mid \lambda_t^i\right) \hat{p}_\theta\left(\lambda_t^i \mid \sigma_{1:t-1}^R(\mathbf{s}_t)\right)}{\underbrace{\sum_{k=1}^n w^k p_\theta\left(\sigma_t^R(\mathbf{s}_t) \mid \lambda_t^k\right) \hat{p}_\theta\left(\lambda_{t-1}^k \mid \sigma_{1:t-1}^R(\mathbf{s}_t)\right)}_{p_\theta\left(\sigma_t^R(\mathbf{s}_t) \mid \sigma_{1:t-1}^R(\mathbf{s}_t)\right)}}, \quad (22)$$

dove  $\theta = \{\alpha, \gamma, \rho, \hat{\alpha}, \hat{\gamma}, \sigma, \lambda_0\}$  è il vettore di parametri del modello,  $\omega^{(i)}$  e  $\lambda_t^{(i)}$  o  $\lambda_t^{(k)}$  sono rispettivamente i *pesi* e i *nod*i della quadratura.

Il problema di ottimo (1) diviene pertanto:

$$\max_{\theta \in \Omega_\theta} \mathcal{L}(\theta) = \max_{\theta \in \Omega_\theta} \prod_{t=1}^T p_\theta\left(\sigma_t^R(\mathbf{s}) \mid \sigma_{1:t-1}^R(\mathbf{s})\right). \quad (23)$$

Dalla (23) si nota come la calibrazione produca una stima dei parametri *real world* e *risk-netutral*. I software di riferimento per l'implementazione della procedura di calibrazione sono **R** e **C++**.

Per la soluzione del problema di ottimo in fase di calibrazione viene utilizzata la libreria **nlopt**, e in particolare l'algoritmo *derivative-free coby1a* – acronimo di *Constrained Optimization BY Linear Approximations* mantenuta dal Massachusetts Institute of Technology e inizialmente proposti da Powell in [14] e [15]. La principale caratteristica di questo algoritmo è la robustezza a fronte però di un elevato costo computazione. Tale scelta rimane giustificata dal fatto che la funzione (20) da ottimizzare è molto irregolare e gli algoritmi di ottimizzazione *a gradiente* non permettono di ottenere una stabilità dei risultati. Il numero massimo di iterazioni è stato impostato pari a 1000.

### 3 Applicazione.

In questa Sezione vengono riportati i risultati relativi alla calibrazione del modello ai dati di mercato. In particolare nel paragrafo 3.1 sono analizzati i dati di input del processo di stima. Nel paragrafo 3.2 sono riportati gli indicatori di merito utilizzare per analizzare la bontà di adattamento della calibrazione. Infine nel paragrafo 3.3 sono riportati i risultati.

#### 3.1 La base dati di riferimento.

I dati utilizzati nella fase di calibrazione sono stati acquisiti dal provider *Bloomberg*. In particolare sono stati considerati i tassi interni di rendimento<sup>1</sup> rischiosi relativi

<sup>1</sup>Il tasso interno di rendimento non fornisce esattamente il tasso di interesse per una scadenza prefissata, essendo distorto dal c.d. “effetto cedola”. Pertanto tale tasso va considerato come una proxy del corrispettivo tasso a pronti rischioso.



alla valuta *Euro*, al settore economico *Finance* e al rating  $BBB^{*2}$ . La struttura per scadenza dei tassi risk-free è stata ottenuta a partire dai *Interest Rate Swap* (IRS) attraverso interpolazione lineare e *bootstrap*.

La data di valutazione è il 31/12/2017 e la profondità delle serie storiche è 7 anni ovvero la massima profondità offerta dal provider. I dati hanno passo giornaliero con vite residue a scadenza  $s = \{1, \dots, 20\}$  anni. La figura 1, riporta la superficie degli spread osservati sul mercato; si nota come per le serie storiche con scadenze superiori a 10 anni assenti molte osservazioni.

Nella tabella 4 sono riportate medie, volatilità e quantili al 99.5% calcolati sull'intero periodo di osservazione mentre nella tabella 4 lo stesso calcolo è ripetuto considerando sottoperiodi di ampiezza annuale. Si nota come dall'inizio del 2013 la variabilità degli spread subisca un forte decremento. Tale analisi evidenzia come l'andamento dello spread non sia stazionario nel tempo.

Analizzando la figura 2 si può notare come la correlazione sia pressochè 1 tra gli spread per le maturities da 1 a 5 anni e anche per quelli da 10 a 20 anni, mentre sia più bassa tra gli spread con maturities brevi e lunghe.

### 3.2 Gli indicatori di merito.

I risultati della calibrazione sono stati valutati secondo diversi indicatori di merito. Per misurare la bontà di adattamento ai dati di input è stato effettuato un confronto grafico tra le serie storiche di mercato e quelle di modello per le vite residue a scadenza  $\{1, 2, 5, 10, 12, 15, 18, 20\}$ , corredato dal calcolo di medie e deviazioni standard e dall'analisi degli istogrammi e dei QQ-Plot dei residui, definiti come differenza tra valori di mercato e di modello. Inoltre sono stati esaminati tre indicatori sintetici: l'errore quadratico medio (*RMSE*), poiché rappresenta una misura di errore assoluta espressa nella stessa unità di misura dei dati stimati; il coefficiente di determinazione ( $R^2$ ) in quanto costituisce una misura di errore relativa; il parametro  $\omega$  che nelle ipotesi di aleatorietà dei prezzi di mercato serve per cogliere le (*leggere*) imperfezioni del mercato e può essere considerato rappresentativo di effetti quali il differenziale denaro-lettera (*spread bid-ask*) o effetti di liquidità.

In secondo luogo è stata valutata la capacità di adattamento a dati non osservati, confrontando il valore del SCR Spread di uno ZCB rischioso per le scadenze  $\{1, \dots, 30\}$  anni calcolato in logica *modello interno* come VaR della distribuzione del prezzo del titolo ad 1 anno e la corrispondente curva ottenuta tramite la *Formula Standard* [1], e calcolando le statistiche della distribuzione ad un anno della struttura di spread per le vite residue a scadenza  $\{1, 2, 5, 10, 12, 15, 18, 20\}$ .

### 3.3 Risultati.

La tabella 3 presenta il valore iniziale, i limiti superiori e inferiori e il parametro ottimo restituito dalla procedura di ottimizzazione. L'algoritmo di ottimo si è ar-

---

<sup>2</sup>Il provider *Bloomberg* non fornisce tassi rischiosi per singoli rating. Fissato un settore economico, il tasso rischioso per rating  $BBB^*$  è una media dei rating Moody's Baa1, Baa2 e Baa3

restato a 1000 iterazioni e in particolare si nota come il valore stimato di  $\gamma$  risulti invariato rispetto a quello iniziale. Ciò può essere imputato al fatto che il valore risulta ragionevole se confrontato con i valori medi dello spread ad un anno della tabella 4.

Per quanto riguarda l'analisi grafica le figure 4 e 5 mostrano il confronto tra i valori di modello e quelli di mercato. Si nota come il filtro produca in generale buoni risultati, tuttavia per le scadenze più elevate l'adattamento risulta meno preciso. Ciò è dovuto al fatto il modello unifattoriale consente correlazioni costanti lungo tutta la curva a differenza di quanto osservato sul mercato. Tale considerazione è avvalorata dall'analisi della tabella 4 e della figura 3, che riportano i valori di medie e deviazioni standard delle serie storiche di mercato e di modello.

Le figure 6, 7 e 8, 9 riportano rispettivamente istogrammi e QQ-plot delle distribuzioni dei residui per le varie scadenze. Per le distribuzioni degli errori per le scadenze inferiori ai 10 anni l'ipotesi di normalità non è rispettata in quanto sono presenti code molto pesanti mentre per le scadenze superiori si ha un comportamento più normocurtico.

La tabella 5 presenta gli indicatori di merito sintetici. I valori del  $RMSE$  e di  $\omega$  risultano sufficientemente contenuti e in linea con quelli dello *spread bid-ask* mentre l' $R^2$  si attesta ad un valore pari a 0.87 .

Dall'analisi della figura 10 che riporta il confronto tra la curva degli SCR si nota come il calcolo effettuato in logica *modello interno* sia più basso rispetto a quello della *Standard Formula*. Ciò è imputabile alle recenti e meno volatilità condizioni di mercato che l'ipotesi di non stazionarietà del modello permette di cogliere con maggiore efficacia rispetto ai parametri della *Standard Formula*, calibrati in un periodo caratterizzato da una volatilità più elevata.

Tale effetto è riscontrabile anche analizzando la tabella 6 e il grafico 11, che riportano rispettivamente le statistiche e le distribuzioni della struttura di spread a un anno. Si nota infatti come tali valori siano maggiormente conformi alla situazione di mercato più recente.

## 4 Conclusioni.

Dai risultati delle analisi si evince innanzitutto la bontà sostanziale delle stime effettuate mediante le tecniche di filtraggio. I dati utilizzati per la calibrazione sono riprodotti dal modello in modo soddisfacente e i dati proiettati risultano ragionevoli se confrontati con la Formula Standard e la più recente situazione di mercato caratterizzata da una più bassa volatilità.

Tuttavia l'utilizzo dei filtri comporta anche una serie di difficoltà derivanti dalla struttura che li caratterizza. Si ha infatti che la scelta della profondità della serie storica può influenzare in modo sostanziale il risultato della stima. I tempi di calibrazione sono di molto superiori rispetto alle procedure classiche di stima riferite ad un'unica data. Infine l'implementazione del *particle filter* richiede il calcolo di integrali per via numerica la cui stabilità e velocità dipende dal tipo di implementazione effettuata.

Ulteriori analisi più approfondite inerenti lo studio della dipendenza della soluzione dalla profondità della serie storica e la sua stabilità rispetto alla presenza di minimi locali, e l'uso di un modello con una componente di salto verranno approfondite in lavori di ricerca futuri.

## References

- [1] Parlamento Europeo e Consiglio dell'Unione Europea (2009). Direttiva 138/2009. Gazzetta Ufficiale dell'Unione Europea.
- [2] Duffie D., Singleton K.J., *Modeling Term Structures of Defaultable Bonds*, The Review of Financial Studies, 2 (4),1999, pp. 687-720.
- [3] Duffie D., Singleton K.J., *Credit Risk. Pricing, measurement, and management*, Princeton, Princeton University Press, Princeton, Princeton University Press, 2003.
- [4] McNeil, A.J., Frey, R., Embrechts, P., *Quantitative Risk Management. Concepts, techniques and tools*, Princeton, Princeton University Press, 2015.
- [5] Lando D., *Credit risk modeling*, Princeton University Press, 2004.
- [6] Schonbucher P.J, *Credit Derivatives Pricing Models: Models, Pricing and Implementation*, Wiley, 2003.
- [7] Jeanblanc M., Yor M., Chesney M, *Mathematical methods for financial markets*, Springer Finance, 2009.
- [8] O'Kane D., *Modelling Single-Name and Multi-Name Credit Derivatives*, Wiley finance, 2008.
- [9] Doucet A., de Freitas N., Gordon N. *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, Springer-Verlag New York, 2001, Statistics for Engineering and Information Science.
- [10] Durbin J., Koopman S.J. *Time Series Analysis by State Space Methods*, Oxford University Press, 2012, Oxford Statistical Science.
- [11] Lemke W. (Deutsche Bundesbank), *Term Structure Modeling and Estimation in a State Space Framework*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 565.
- [12] Brigo D.; Mercurio F. *Interest Rate Models: Theory and Practice - With Smile, Inflation and Credit*, (2006) 2nd Edition Springer.
- [13] Cox, J.C., J.E. Ingersoll and S.A. Ross (1985). *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*. *Econometrica*. 53: 385-407.
- [14] Powell, M.J.D., *A direct search optimization method that models the objective and constraint functions by linear interpolation*, in Gomez S., Hennart, J.-P., (eds.), *Advances in Optimization and Numerical Analysis*, Dordrecht, Kluwer Academic, 1994.
- [15] Powell, M.J.D., *Direct search algorithms for optimization calculations*, *Acta Numerica* 7(1998), 287-336.

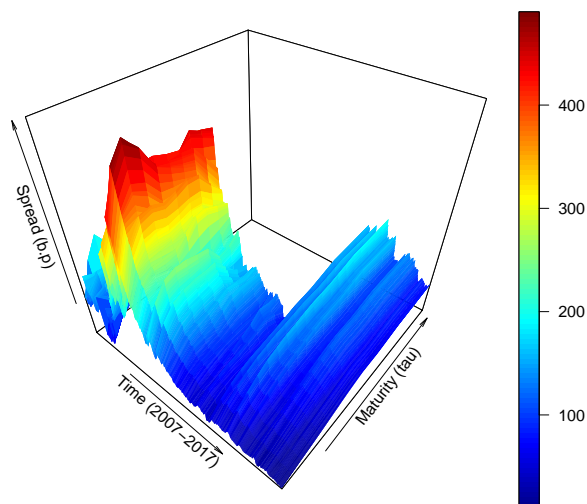


Figure 1: Andamento delle strutture di spread dal 01/01/2007 al 31/12/2017.

Scadenze	Medie	Dev. Std	Quantile
1	89.84	75.74	368.55
5	150.80	86.04	417.65
10	140.74	70.72	421.35
15	118.72	25.96	187.45
20	122.75	26.50	195.10

Table 1: Medie, deviazioni standard e quantili al 99.5% in p.b. dei valori storici osservati (MKT).

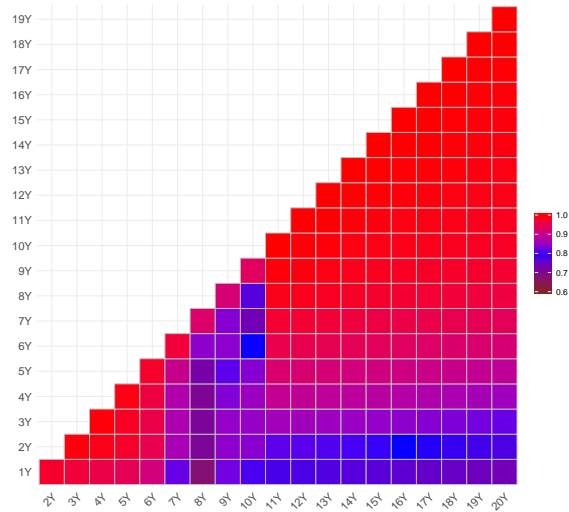


Figure 2: Mappa di calore delle correlazioni tra spread a diverse maturities.

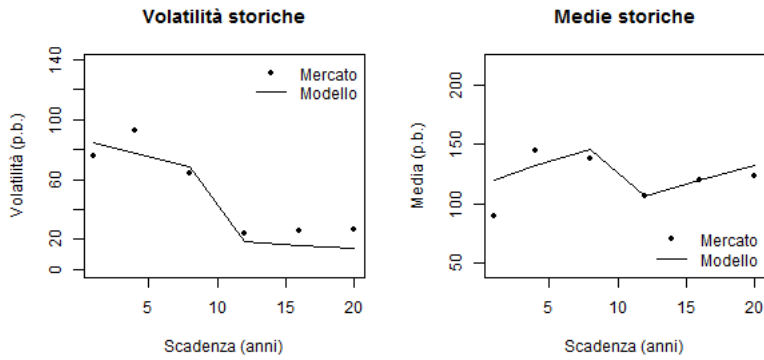


Figure 3: Confronto tra deviazioni standard e medie campionarie, calcolate sulla serie storica ricostruita con il modello (linea continua) e sui valori di mercato (punti).

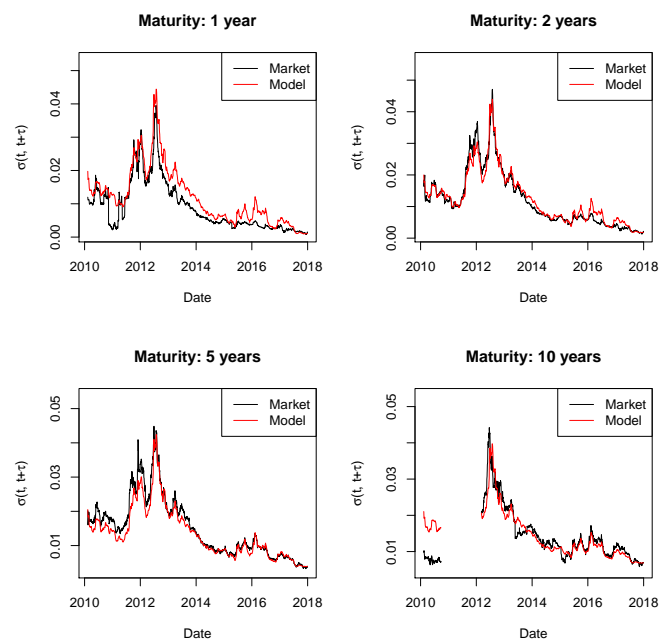


Figure 4: Contronto tra serie storiche di modello (in rosso) e di mercato (in nero) per le scadenze: 1, 2, 5, 10 anni.

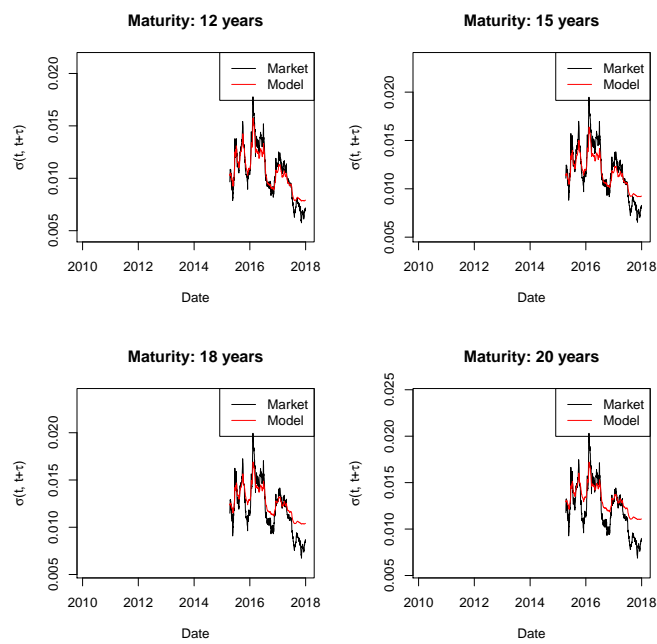


Figure 5: Contronto tra serie storiche di modello (in rosso) e di mercato (in nero) per le scadenze: 12, 15, 18 20 anni.



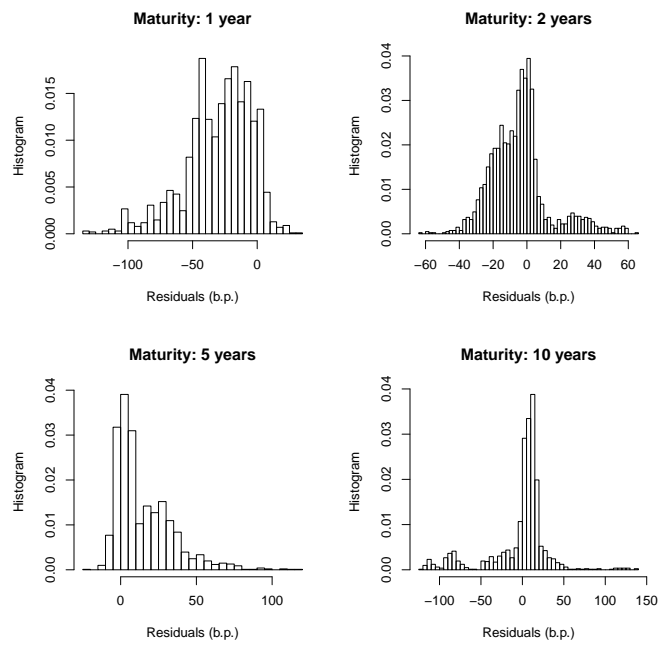


Figure 6: Distribuzione degli errori per le scadenze: 1, 2, 5, 10 anni.

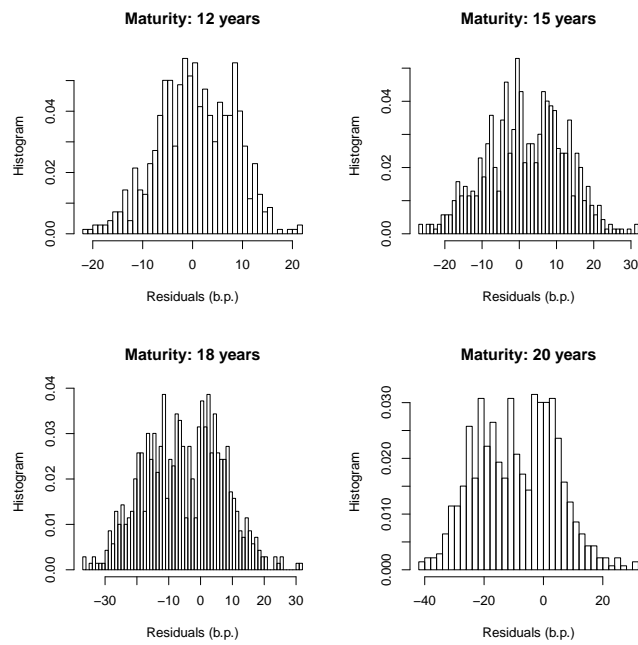


Figure 7: Distribuzione degli errori per le scadenze: 12, 15, 18 20 anni.

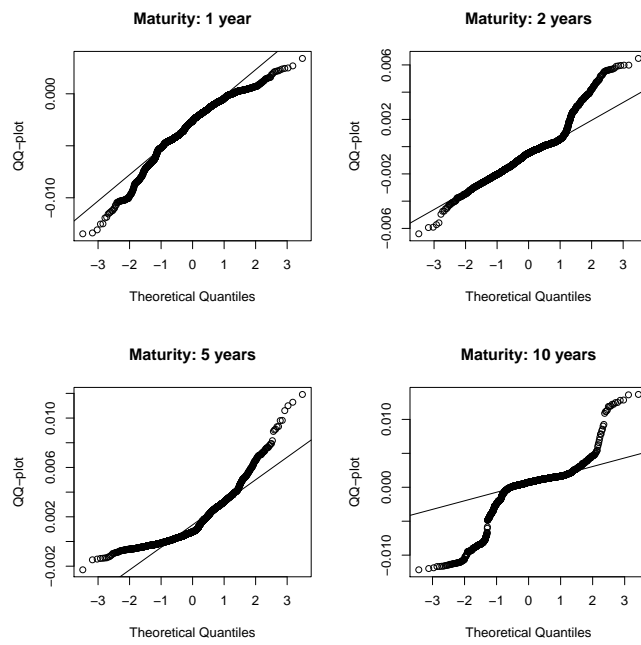


Figure 8: QQ-Plot degli errori per le scadenze: 1, 2, 5, 10 anni.

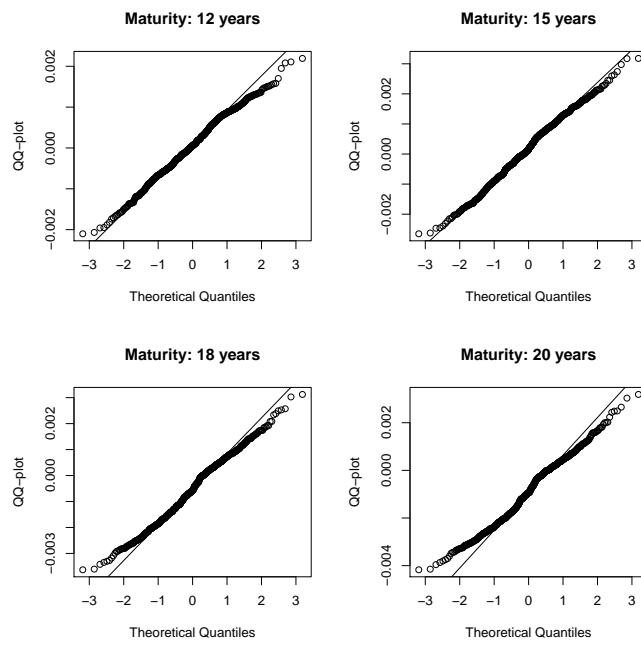


Figure 9: QQ-Plot degli errori per le scadenze: 12, 15, 18 20 anni.

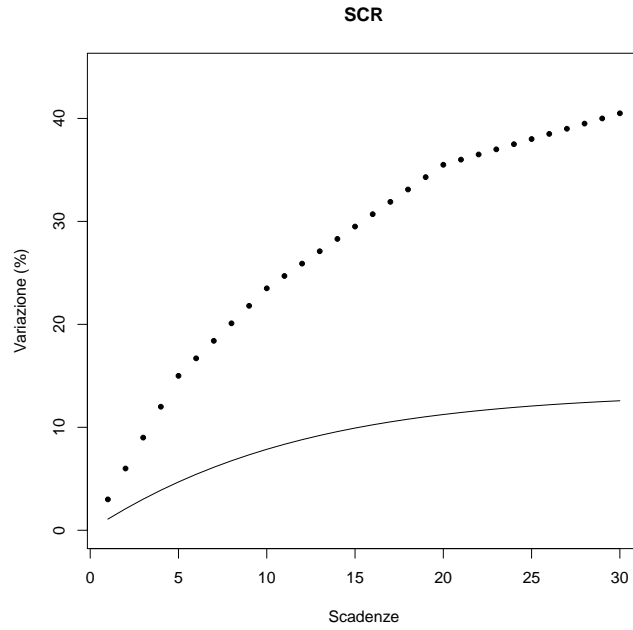


Figure 10: SCR di modello (linea continua) e di mercato (punti) per uno ZCB in funzione della scadenza.

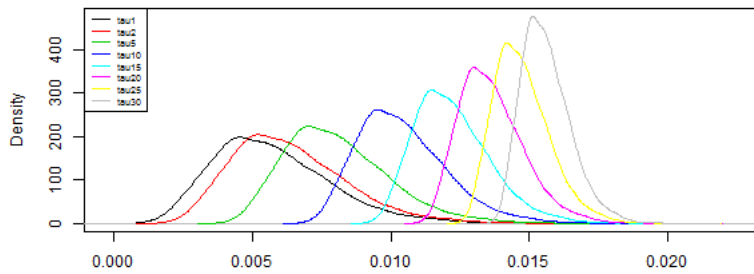


Figure 11: Distribuzione proiettate  $\sigma_T^R(\mathbf{s})$  con  $T = 1$  e per le scadenze: 1,2,5,10,15,20,25 e 30 anni.

Data inizio	Data fine	1Y			5Y			10Y			20Y		
		Media	Dev. Std	Quantile	Media	Dev. Std	Quantile	Media	Dev. Std	Quantile	Media	Dev. Std	Quantile
12/02/2010	31/12/2010	106.63	38.48	179.13	182.94	15.03	226.14	76.75	6.19	99.05			
03/01/2011	30/12/2011	132.82	80.70	287.71	211.38	69.90	399.07						
02/01/2012	31/12/2012	222.87	63.60	392.06	294.95	63.50	434.50	288.51	56.58	434.93			
01/01/2013	31/12/2013	110.65	21.31	156.73	189.31	28.60	259.07	180.02	33.39	241.52			
02/01/2014	31/12/2014	52.53	8.51	71.71	98.59	15.23	134.97	129.49	14.33	163.84			
02/01/2015	31/12/2015	40.33	6.82	53.96	89.94	13.37	122.90	104.44	18.84	148.75	130.45	18.72	172.51
04/01/2016	30/12/2016	31.95	6.89	48.63	84.91	21.86	135.36	116.19	22.63	168.48	134.47	26.58	198.12
02/01/2017	29/12/2017	19.33	6.10	36.80	53.84	13.58	78.48	88.51	19.32	123.04	105.32	21.74	142.43

Table 2: Medie, deviazioni standard e quantili al 99.5% in p.b. calcolate annualmente.

<b>Parametro</b>	<b>Valore Iniziale</b>	<b>Limite Inferiore</b>	<b>Limite Superiore</b>	<b>Valore Stimato</b>
$\alpha$	0.800000	0.001000	2.000000	0.614703
$\gamma$	0.012000	0.001000	0.080000	0.012067
$\rho$	0.045000	0.010000	0.800000	0.067389
$\hat{\alpha}$	0.250000	0.001000	2.000000	0.101116
$\hat{\gamma}$	0.015000	0.001000	0.100000	0.022485
$\rho$	0.005000	0.000100	0.030000	0.002670
$\lambda_0$	0.004000	0.000010	0.300000	0.000182

Table 3: Valori iniziali, vincoli (inferiori e superiori) e output di stima dei parametri di modello.

<b>Scadenze</b>	<b>Medie (pb)</b>		<b>Dev. Std. (pb)</b>	
	<b>MKT</b>	<b>MDL</b>	<b>MKT</b>	<b>MDL</b>
1	89.84	119.58	75.74	84.95
4	144.85	132.30	92.18	77.72
8	137.30	145.86	64.38	68.59
12	106.56	105.94	24.33	18.41
16	119.40	120.16	26.03	16.21
20	122.75	131.78	26.50	14.33

Table 4: Medie e deviazioni standard dei valori storici osservati (MKT) e ricostruiti(MDL).

<b>Indicatori di merito</b>	<b>Valore</b>
RMSE (p.b.)	25.73
$R^2$	0.87
$\omega$ (p.b.)	21.13

Table 5: Indicatori di merito.

$\tau$	Minimo	Massimo	Media	Dev. Std.	$q_{0.995}$
1	9.29	198.85	57.21	21.47	127.75
2	16.96	201.09	63.50	20.85	132.03
5	38.17	206.34	80.68	19.04	143.27
10	67.90	211.47	104.14	16.26	157.63
15	91.47	213.89	122.42	13.82	167.99
20	110.03	214.86	136.53	11.87	175.54
25	124.65	215.13	147.52	10.24	181.20
30	136.23	215.09	156.16	8.93	185.51

Table 6:  $\sigma(T, T + \tau)$  (p.b.), con  $T = 1$