

Barbara Rogo

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

Roma, maggio 2016

La simulazione storica per il calcolo del VaR di un prodotto strutturato.
Tecniche di backtesting.

1 Introduzione

Negli ultimi anni è diventato largamente diffuso, sia tra gli Organi di Vigilanza che tra le imprese finanziarie, l'utilizzo di un indicatore sintetico di natura quantitativa per informare sul rischio associato a un investimento poiché fornisce una rappresentazione di facile comprensione e di immediata lettura. A esempio nella regolamentazione vigente nell'Unione Europea¹ a un fondo aperto è assegnata una classe di rischio da 1 a 7 sulla base del valore stimato della volatilità dei rendimenti settimanali osservati nei cinque anni precedenti. Recentemente tale rappresentazione è stata estesa anche a prodotti d'investimento complessi definiti preassemblati, denominati PRIPS, nell'ambito dei quali ricadono anche alcune tipologie di contratti d'assicurazione, che espongono l'investitore alla variabilità del valore di uno o più sottostanti che non sono direttamente posseduti, quindi in particolare ai prodotti strutturati. Alcune associazioni nazionali per i contratti strutturati hanno sviluppato da diversi anni sistemi di rating propri per classificare tali strumenti d'investimento in termini di rischio associato con la stessa logica adottata per i fondi aperti: definiti gli intervalli di rischiosità, in base al valore assunto dall'indicatore (misura) di rischio, al contratto strutturato è associato un grado di rischiosità da basso a alto.

In questo ambito è ampiamente diffuso l'utilizzo del Value-at-Risk (VaR) come misura per il rischio di mercato relativo a esposizioni in contratti strutturati. Il VaR rappresenta uno standard largamente condiviso, utilizzato anche per la quantificazione del requisito patrimoniale di imprese bancarie (Basilea II) e assicurative (Solvency II). La sua diffusione d'applicazione nel tempo, estesa successivamente anche a altre tipologie di rischio (di credito, di liquidità), risiede principalmente nella facilità di comprensione giacché corrisponde alla perdita, a fronte di esposizioni in singole posizioni o portafogli, che ci si aspetta venga superata solo con una probabilità fissata dell' $\alpha\%$, detta probabilità di copertura (o di fallimento) nel successivo periodo (holding period), corrisponde quindi all' α -quantile di una distribuzione "pertinente" del profitto e delle perdite.

In ambito modellistico la misurazione del VaR di un contratto strutturato fa riferimento a tecniche di simulazione storica o Monte Carlo full valuation: generato un numero sufficiente di scenari in base all'osservazione passata o alle dinamiche stocastiche (scelte) delle variabili finanziarie da cui dipende il prezzo, è costruita la distribuzione campionaria dei rendimenti in riferimento all'holding period come variazione percentuale tra il valore simulato e il valore corrente, quindi è calcolato il percentile in riferimento alla probabilità α . L'Associazione Svizzera per i prodotti strutturati (SVSP) utilizza la tecnica della simulazione storica fissando i parametri del VaR all'1% per il livello di copertura e a 10 giorni per l'orizzonte di detenzione considerando una finestra temporale di 250 osservazioni passate. Questa tecnica è ampiamente utilizzata in quanto facile da implementare e non vengono fatte assunzioni sulla distribuzione, è dunque

¹Il riferimento è alla Direttiva 2009/65/CE detta UCITS IV.

model free. L'assunto implicito è che la storia è ripetibile, ossia che la distribuzione passata della variabile finanziaria di interesse rappresenta perfettamente quelle future attese. Presenta difetti quali in taluni casi la mancanza di dati che ne preclude l'applicabilità, inoltre è ignorato l'ordine temporale delle osservazioni in quanto ugualmente pesate, la pericolosità è che la serie storica non catturi adeguatamente, a esempio, periodi di alta volatilità. Questo metodo è molto sensibile all'ampiezza dell'orizzonte storico², ciò rappresenta una questione delicata e controversa: se lungo le stime delle code della distribuzione possono risultare più realistiche, aspetto importante se il livello di confidenza è elevato, d'altronde considerare dati eccessivamente lontani nel passato che incidono quanto quelli recenti perché di uguale peso può non essere adeguato.

La correttezza d'informazione richiede che il modello di misurazione del VaR sia ben specificato, ossia affidabile nei risultati e capace di catturare l'effettivo rischio, necessita dunque di un processo di validazione basato su tecniche di backtesting indicate anche dagli Organi di controllo per verificare l'adeguatezza del capitale di vigilanza. Il backtesting è una procedura statistica che confronta la storia dei profitti e delle perdite realizzate con le corrispondenti stime del VaR. La caratteristica principale di base è che un VaR calcolato al livello di confidenza $(1 - \alpha)$ non dovrebbe essere superato α volte su 100 casi (unconditional coverage), per cui la frequenza attesa delle violazioni (o eccezioni) al VaR osservate dovrebbe essere uguale a α . Se la probabilità incondizionata della violazione è significativamente più alta allora il modello di VaR sottovaluta il livello di rischio, in caso contrario è eccessivamente prudente. Il test proposto da Kupiec (1995), ampiamente applicato nella pratica essendo previsto dalla disciplina bancaria per la determinazione del requisito patrimoniale minimo³, difetta di scarsa potenza statistica in riferimento a dimensioni campionarie realistiche.

Altra proprietà fondamentale è quella dell'indipendenza delle violazioni che quindi devono distribuirsi uniformemente nel tempo e che caratterizza un processo "senza memoria" (memoryless), l'eventuale raggruppamento (cluster) è sintomo di un modello che non cattura adeguatamente la dinamica della volatilità (e delle correlazioni) di mercato. Se entrambe le proprietà sono soddisfatte il modello possiede la proprietà della copertura condizionata (conditional coverage) e ciò equivale a assumere che le violazioni si distribuiscono come una Bernoulli con probabilità α . Christoffersen (1998) propone un test LR (Likelihood Ratio) condotto nell'ambito della massima verosimiglianza che indaga solo la dipendenza del primo ordine, rispetto all'istante immediatamente precedente il verificarsi di una violazione.

Per la dipendenza di ordine superiore la letteratura accademica propone alcuni test che utilizzano la durata in giorni tra due violazioni consecutive, tra questi⁴ il test GMM (Generalized Method

²L'argomento è trattato in Pritsker (2006)

³È adottato l'approccio cosiddetto a semaforo (traffic light): individuati tre intervalli indicati come verde, giallo e rosso, al numero delle violazioni al VaR calcolato in riferimento a 250 osservazioni è associato il valore del fattore moltiplicativo che interviene nella formula di calcolo.

⁴Il test proposto da Christoffersen e Pelletier (2004) che utilizza la statistica LR per testare l'ipotesi nulla

of Moment) proposto da Candelon et al. (2011), basato su specifici momenti definiti dai polinomi ortonormali associati alla distribuzione geometrica, sembra offrire un quadro d'indagine migliore in termini di risultati e facilità di implementazione e uniforme giacché consente di verificare separatamente e congiuntamente le due proprietà, aspetto importante evidenziato da Campbell (2007) secondo cui il test congiunto può individuare una misura di VaR che viola entrambe le proprietà ma ha una capacità inferiore di identificare la violazione della singola.

Recentemente Ziggel et al. (2014) propongono tre nuovi tests denominati MCS basati su variabili aleatorie di Bernoulli i.i.d., il primo ottenuto ridefinendo la proprietà di copertura incondizionata, il secondo che indaga sia l'indipendenza che la proprietà i.d., il terzo per la verifica di entrambe nell'ambito del quale è possibile pesare le singole proprietà. Gli autori dimostrano tramite uno studio empirico l'importanza della proprietà i.d. per l'individuazione di inefficienze del modello in fasi critiche di mercato caratterizzate da volatilità elevate che determinano clusters nel processo delle violazioni, e nello studio di simulazione condotto dimostrano la maggiore potenza sia in termini di dimensione che in termini statistici rispetto ai tests indicati precedentemente e che per la proprietà di indipendenza il test GMM è statisticamente migliore se il livello di copertura e di significatività sono dell'1% indipendentemente dalla dimensione campionaria.

Altri lavori di ricerca proposti per il backtesting del VaR sono quelli di Engle e Manganelli (2004) che considerano una particolare autoregressione della successione delle violazioni (CAViaR test), di Haas (2005) che presenta la versione discreta dell'approccio duration-based di Christoffersen e Pelletier (2004) per la verifica della proprietà di indipendenza, Berkowitz et al. (2011) dove viene utilizzata la statistica Ljung-Box, Santos e Alves (2013) che propongono un test esatto per individuare modelli di VaR che generano stime in clusters, Lopez (1999) utilizza un metodo alternativo basato sulle funzioni di perdita, indicato più utile e efficace per la scelta tra modelli diversi di misurazione del VaR ⁵.

Il lavoro presenta uno studio del modello di simulazione storica per il calcolo del VaR giornaliero di un contratto strutturato quotato sul mercato, considerando ampiezze diverse dell'orizzonte storico e calcolando il prezzo teorico nell'ambito del modello di Black e Scholes. Lo studio è condotto anche in relazione alla metodologia di misurazione della volatilità del sottostante della componente derivata che, come è noto, ha importanza fondamentale. La ricerca accademica offre diverse alternative di stima, sono stati dunque considerati tre differenti approcci modellistici, il modello Equally Weighted Moving Average (EWMA), il modello di RiskMetrics (RM) e il modello GARCH con caratterizzazioni differenti che determinano sette tipologie modellistiche. Sono stati quindi applicati i tests LR, GMM e MCS alla sequenza delle violazioni osservate di distribuzione geometrica della durata ha bassa potenza in riferimento a campioni reali e in alcuni casi non è possibile calcolare la statistica, inoltre per testare l'ipotesi alternativa deve essere specificata una particolare distribuzione.

⁵È applicato da Sarma et al. (2003) nel processo per la selezione di 15 differenti modelli di stima del VaR.

per individuare l'eventuale inadeguatezza di previsione che ha effetti significativi ai fini di una corretta informazione del rischio assunto e più in generale di un'efficace gestione del rischio. L'analisi è condotta in una prima fase tramite la procedura proposta da Christoffersen, quindi è applicato il test GMM per identificare sequenze di violazioni caratterizzate da dipendenza di ordine superiore a uno, mentre il test MCS è utilizzato per specificare quelle che eventualmente non godono della proprietà i.d. Per il calcolo del p-value di ciascuna statistica test è stato applicato il metodo di simulazione Monte Carlo indicato da Poldosky e Ziggel (2009)⁶.

Il lavoro è organizzato introducendo dapprima il metodo di simulazione storica per la stima del VaR (sezione 2), quindi sono descritte le procedure di backtesting del VaR implementate (sezione 3) e, dopo la formalizzazione del contratto strutturato sia in termini di pay-off che di prezzo (sezione 4), sono indicati i metodi di stima della volatilità (sezione 5), in ultimo sono presentati e discussi i risultati empirici ottenuti (sezione 6) e indicate alcune conclusioni (sezione 7).

2 Il metodo di simulazione storica full valuation

Sia $V_t(\mathbf{p})$ il valore nell'istante t di un contratto finanziario, essendo $\mathbf{p}_t = \{p_t^1, p_t^2, \dots, p_t^m\}$ il vettore delle m variabili finanziarie di mercato stimate in t . Fissato il numero N degli scenari e l'orizzonte temporale di ampiezza T giorni, sono considerate le osservazioni (giornaliere) passate p_{t-j}^i , con $j = 0, 1, \dots, N-T+1$, e calcolato il valore simulato $\hat{p}_{t,k}^i$ dell' i -esima variabile finanziaria come:

$$\hat{p}_{t,k}^i = p_t^i \frac{p_{t-j}^i}{p_{t-j-T}^i},$$

con $k = 1, 2, \dots, N$ e $i = 1, 2, \dots, m$. Dati gli N prezzi "simulati" $V_t(\hat{\mathbf{p}}_{t,k})$, la distribuzione campionaria dei rendimenti è data da:

$$\hat{R}_{t,k} = \log \frac{V_t(\hat{\mathbf{p}}_{t,k})}{Q_t}, \quad (1)$$

essendo $\hat{\mathbf{p}}_{t,k} = \{\hat{p}_{t,k}^1, \hat{p}_{t,k}^2, \dots, \hat{p}_{t,k}^m\}$ e Q_t la quotazione osservata in t .

Poiché il VaR in t in corrispondenza dell'orizzonte temporale di T giorni e al livello di confidenza $(1 - \alpha)$, che indichiamo con $VaR_{t+T}(\alpha)$, è definito come:

$$P[R_{t+T} \leq VaR_{t+T}(\alpha) | \Omega_t] = \alpha, \quad (2)$$

dove R_{t+T} è la variabile aleatoria $\log[V(t+T)/Q_t]$ e Ω_t è l'informazione disponibile in t , la stima in t è ottenuta calcolando l' α -quantile della distribuzione campionaria dei rendimenti, che corrisponde al valore che separa l' $\alpha\%$ dei rendimenti simulati $\hat{R}_{t,k}$ ordinati in senso crescente dai rimanenti. Nel seguito della trattazione, per semplificare il formalismo, T è posto uguale a un giorno.

⁶La tecnica è descritta e applicata in Ziggel et al. (2014).

3 Tecniche per il backtesting del VaR

Sia $\{R_t\}_{t=1}^n$ la successione dei rendimenti giornalieri osservati di uno strumento finanziario (o di un portafoglio) e $VaR_t(\alpha)$ il VaR giornaliero stimato in t al livello di copertura α , è definita $I_t(\alpha)$ la variabile indicatore come:

$$I_t(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } R_t < VaR_t(\alpha) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (3)$$

che individua il processo stocastico $\{I_t(\alpha)\}$ delle violazioni. Il modello di VaR è correttamente specificato se la sequenza $\{I_t(\alpha)\}_{t=1}^n$ delle violazioni osservate soddisfa le seguenti proprietà:

- 1) la probabilità che si verifichi una violazione è uguale a α , ossia $P[I_t(\alpha) = 1] = E[I_t(\alpha)] = \alpha$,
- 2) le violazioni osservate in due differenti epoche sono distribuite indipendentemente, quindi la variabile $I_t(\alpha)$ è indipendente da $I_{t-k}(\alpha) \forall k \neq 0$.

La 1) è detta della copertura incondizionata (uc), la 2) di indipendenza (ind) e combinate insieme definiscono la proprietà della copertura condizionata (cc) esprimibile tramite la:

$$E[I_t(\alpha)|\Omega_{t-1}] = \alpha, \quad (4)$$

secondo cui dunque il processo $\{I_t(\alpha)\}$ del fallimento è i.i.d. e ha distribuzione di Bernoulli con probabilità α .

Nel quadro proposto da Christoffersen la proprietà uc è testata assumendo che il processo del fallimento è distribuito indipendentemente, contro l'ipotesi alternativa che la probabilità di fallimento è diversa da α ; per la proprietà ind l'ipotesi alternativa è che il processo del fallimento è di Markov del primo ordine, infine nel test congiunto (per la proprietà cc) l'ipotesi alternativa è che il processo del fallimento è di Markov del primo ordine con una matrice di probabilità di transizione diversa. I test sono condotti nell'ambito del rapporto di verosimiglianza e le statistiche LR relative a ciascun test sono:

$$LR_{uc} = -2 \log \frac{(1 - \alpha)^{n_0} \alpha^{n_1}}{(1 - \hat{\alpha})^{n_0} \hat{\alpha}^{n_1}}, \quad (5)$$

essendo n_0 e n_1 il numero di 0 e di 1 nella successione della variabile indicatore rispettivamente e $\hat{\alpha} = \frac{n_1}{n_0 + n_1}$;

$$LR_{ind} = -2 \log \frac{\hat{\alpha}_2^{n_{00} + n_{10}} (1 - \hat{\alpha}_2)^{n_{01} + n_{11}}}{\hat{\alpha}_{01}^{n_{01}} (1 - \hat{\alpha}_{01})^{n_{00}} \hat{\alpha}_{11}^{n_{11}} (1 - \hat{\alpha}_{11})^{n_{10}}}, \quad (6)$$

dove n_{ij} indica il numero di valori i seguiti dal valore j nella successione della variabile indicatore, mentre è:

$$\hat{\alpha}_{01} = \frac{n_{01}}{n_{00} + n_{01}}, \quad (7)$$

$$\hat{\alpha}_{11} = \frac{n_{11}}{n_{10} + n_{11}}, \quad (8)$$

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{n_{00} + n_{01}}{n_{00} + n_{01} + n_{10} + n_{11}}, \quad (9)$$

e

$$\text{LR}_{\text{cc}} = -2 \log \frac{(1 - \alpha)^{n_1} \alpha^{n_0}}{\hat{\alpha}_{01}^{n_{01}} (1 - \hat{\alpha}_{01})^{n_{00}} \hat{\alpha}_{11}^{n_{11}} (1 - \hat{\alpha}_{11})^{n_{10}}}. \quad (10)$$

La procedura per il backtesting del VaR denominata GMM è sviluppata per verificare l'ipotesi nulla di distribuzione geometrica della successione delle durate tra due violazioni consecutive definendo i momenti tramite i polinomi ortonormali.

Se d è una v.a. con distribuzione geometrica con probabilità di successo β , il polinomio ortonormale di ordine j associato ha la seguente forma:

$$M_j(d; \beta) = \frac{(1 - \beta)(2j - 1) + \beta(j - d)}{j\sqrt{1 - \beta}} M_{j-1}(d, \beta) - \frac{j-1}{j} M_{j-2}, \quad (11)$$

per $j \in \mathbf{N}^+$ e con $M_{-1}(d, \beta) = 0$ e $M_0(d, \beta) = 1$.

Sia $\{d_1, d_2, \dots, d_s\}$ la successione delle durate tra due violazioni consecutive, essendo $d_i = t_i - t_{i-1}$ con t_i l'istante corrispondente all' i -esima violazione osservata, le statistiche test relative alle proprietà uc, ind e cc sono:

$$\text{GMM}_{\text{uc}} = \left(\frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{i=1}^s M_1(d_i; \alpha) \right)^2, \quad (12)$$

$$\text{GMM}_{\text{ind}} = \left(\frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{i=1}^s M(d_i; \hat{\alpha}) \right)^T \left(\frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{i=1}^s M(d_i; \hat{\alpha}) \right), \quad (13)$$

$$\text{GMM}_{\text{cc}} = \left(\frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{i=1}^s M(d_i; \alpha) \right)^T \left(\frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{i=1}^s M(d_i; \alpha) \right), \quad (14)$$

$$(15)$$

essendo $M(d_i; x) = \{M_1(d_i, x), M_1(d_i, x), \dots, M_p(d_i, x)\}$ e $\hat{\alpha}$ il valore osservato del tasso di fallimento.

In ultimo, il backtest MCS proposto da Ziggel et al. è svolto avendo individuato carenze e inefficenze nella formulazione della proprietà uc e ind precedentemente indicate che vengono dunque ridefinite rispettivamente come:

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n I_t(\alpha) \right] = \alpha,$$

$$\{I_t(\hat{\alpha})\} \stackrel{i.i.d.}{\sim} \text{Bern}(\hat{\alpha}),$$

essendo $\hat{\alpha}$ una generica probabilità.

La prima consente di effettuare il test sia in senso unilaterale che bilaterale, in tal modo potendo caratterizzare un modello che sovrastima o che sottostima il rischio, mentre la seconda di indagare la proprietà di indipendenza nel contesto più ampio i.i.d. Le statistiche test sono:

$$\text{MCS}_{\text{uc}} = \sum_{t=1}^n I_t(\alpha), \quad (16)$$

$$\text{MCS}_{\text{iid},s} = t_1^2 + (n - t_s)^2 + \sum_{i=2}^s (t_i - t_{i-1})^2, \quad (17)$$

$$\text{MCS}_{\text{cc},s} = af(\text{MCS}_{\text{uc}}) + (1 - a)g(\text{MCS}_{\text{iid},s}), \quad (18)$$

$$(19)$$

essendo $0 \leq a \leq 1$ il peso assegnato al test per la proprietà uc e dove:

$$f(\text{MCS}_{\text{uc}}) = \left| \frac{\sum_{t=1}^n I_t(\alpha)/n - \alpha}{\alpha} \right| \quad (20)$$

e

$$g(\text{MCS}_{\text{iid},s}) = \frac{\text{MCS}_{\text{iid},s} - \hat{r}}{\hat{r}} 1_{\{\text{MCS}_{\text{iid},s} \geq \hat{r}\}}, \quad (21)$$

che misurano entrambe lo scostamento tra il valore atteso e osservato della corrispondente statistica. I dettagli tecnici per il calcolo di \hat{r} , ottenuto tramite simulazione Monte Carlo, sono in Ziggel et al. (2014).

Il p-value relativo a ciascun test è calcolato per via simulativa come in Ziggel et al. (2014) dove sono illustrati anche gli aspetti teorici. Se Y è la generica statistica test, fissato il numero M di simulazioni Monte Carlo, è simulato il valore Y_j della statistica test sotto l'ipotesi nulla e estratto un numero casuale $\epsilon_j \sim 0.001N(0, 1)$, per $j = 1, 2, \dots, M + 1$. Il valore osservato e simulato di Y sono rispettivamente:

$$Y_0 = Y_{n,\alpha} + \epsilon_{M+1} \quad (22)$$

$$Y_j = Y_{j,n,\alpha} + \epsilon_j, \quad (23)$$

avendo indicato con $Y_{n,\alpha}$ il valore della statistica test associato alla sequenza $\{I_t(\alpha)\}_{t=1}^n$ delle violazioni osservate e $Y_{j,n,\alpha}$ il valore della statistica test associato alla sequenza $\{I_{t,j}(\alpha)\}_{t=1}^n$ delle

violazioni simulate. Il p-value associato è ottenuto dalla percentuale di valori simulati che superano il valore osservato da confrontare con il livello di significatività γ del test. Equivalentemente può essere calcolato il valore critico che corrisponde al quantile al livello γ .

4 La formalizzazione del contratto

Sia h_0 la data di emissione (inizio), il contratto genera il flusso di poste aleatorie $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, C + X_l\}$ relativo allo scadenziario (annuale) $\mathbf{h} = \{h_1, h_2, \dots, h_l\}$, con $h_j = t_0 + j$, così definito:

$$X_j = C \begin{cases} i & \text{se } I_j \geq I_0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (24)$$

con $j = 1, 2, \dots, l$, essendo C il valore nominale e i il tasso fissato contrattualmente, mentre I_j e I_0 sono il valore del bene sottostante all'epoca h_j e h_0 , rispettivamente. È dunque un portafoglio composto da l opzioni digital di tipo cash-or-nothing call aventi come sottostante I e uno zero coupon bond il cui prezzo nell'istante generico t , con $h_0 \leq t < h_1$, nell'ambito del modello di Black e Scholes ha la seguente espressione:

$$V_t(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^l V_t(X_j) + Cv(t, h_m), \quad (25)$$

dove

$$V_t(X_j) = i CN(d^j)v(t, h_j), \quad (26)$$

con

$$d^j = \frac{\log(I_t/I_0) + (r_j - \sigma_t^2/2)(h_j - t)}{\sigma \sqrt{h_j - t}},$$

avendo indicato con I_t il valore del bene sottostante nell'istante t , σ_t il valore della volatilità del bene sottostante I nell'istante t e r_j l'intensità di interesse risk-free in t per la scadenza h_j .

Se l'istante t è successivo a un'epoca di pagamento h_j il prezzo è ovviamente calcolato in riferimento al flusso residuo.

5 La stima della volatilità

Di seguito sono brevemente illustrati i modelli per la stima della volatilità. L'istante temporale t è relativo all'orizzonte temporale avente per estremi le date 2001-01-24 e 2015-12-29.

Il modello Equally Weighed Moved Average (EWMA).

È stimata la deviazione standard dei rendimenti R^I del sottostante in riferimento a una finestra temporale di ampiezza L (giorni) come:

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{1}{L-1} \sum_{i=1}^L (R_{t-i})^2}. \quad (27)$$

Sono considerate ampiezze di dati costituite da 260, 520 e 780 giorni.

Il modello RiskMetrics (RM).

In questo modello lo stimatore della volatilità è definito come:

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^L \lambda^{i-1}} \sum_{i=1}^L \lambda^{i-1} (R_{t+1-i}^I)^2} \quad (28)$$

$$= \sqrt{\lambda \sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda)(R_{t-1}^I)^2}, \quad (29)$$

$$(30)$$

dove $\lambda \in (0, 1)$ è il decay factor che definisce il peso dei rendimenti storici avente forma esponenziale. Il valore della volatilità è più sensibile alle osservazioni recenti rispetto al valore calcolato con lo stimatore (3) e un valore maggiore di λ determina una memoria più lunga. Sono considerati tre diversi valori di λ : 0.94, 0.97, 0.99⁷.

Il modello GARCH.

Nel modello GARCH(p, q) l'equazione che rappresenta il modello è:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i (R_{t-i}^I)^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (31)$$

imponendo la condizione di positività su ciascuno degli $p + q + 1$ parametri. È evidente che il modello RM può essere ottenuto come un caso particolare del modello GARCH(1,1), ponendo $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1 - \lambda$ e $\beta_1 = \lambda$. In ciascun istante temporale t sono stati stimati i valori degli ordini p e q in base al criterio Akaike considerando le 520 osservazioni precedenti t , inoltre la distribuzione dei residui ipotizzata è la skew t-student che permette di modellare l'asimmetria e la pesantezza delle code della distribuzione dei rendimenti.

6 L'applicazione empirica

In questa sezione è proposto un caso di studio in cui è applicato il metodo della simulazione storica full valuation, descritto nella sezione 2, per il calcolo del VaR al 95% e al 99% in riferimento

⁷Nell'applicazione empirica il primo valore della serie storica è calcolato prendendo $L = 75$.

a un orizzonte di detenzione di un giorno del contratto strutturato XS0765617377, formalizzato nella sezione 4, avente come sottostante l'indice del mercato azionario italiano FTSEMIB.

Lo strumento finanziario è stato emesso alla data 2012-05-17 e ha una durata (complessiva) di 5 anni, a ogni cadenza annuale è pagato un ammontare, detto importo digital, determinato dal tasso $i = 6.35\%$ se il livello dell'indice alla corrispondente epoca di pagamento è superiore o uguale al livello iniziale $I_0 = 14118.13$.

La Figura 1 mostra i log-rendimenti giornalieri dell'indice, mentre nella Tabella 1 sono riportate le statistiche descrittive; si notano le caratteristiche tipiche dei rendimenti finanziari, in particolare una leggera asimmetria negativa e una curtosi più alta del valore 3, indicativo che la distribuzione ha code più pesanti della normale.

Il prezzo del contratto

Il prezzo del contratto strutturato $V_t(\mathbf{p})$ dipende da tre variabili finanziarie: il valore I_t del sottostante, la volatilità σ_t del sottostante, l'intensità di interesse risk-free r_k . In ciascun istante t è stata stimata la volatilità dell'indice tramite sette diversi approcci, specificati nella sezione 5, mentre l'intensità di interesse risk-free è stata stimata applicando il metodo bootstrap alle quotazioni (mid) dei tassi swap e completando con i tassi interbancari Euribor a 1, 3 e 6 mesi⁸. Per tener conto del rischio di credito (e di altri tipi di rischi) in ciascuna istante t è stato stimato lo spread creditizio medio s_t tramite il metodo di Newton, per cui il fattore di sconto $v(t, h_j)$ nelle formule (25) e (26) è aggiustato con il termine $(1 + s_t)^{-(h_j - t)}$.

Per la generazione degli scenari, e quindi per il calcolo del prezzo simulato $V_t(\hat{\mathbf{p}}_k)$, è stato osservato il valore dell'indice e sono stati stimati i valori della volatilità e dell'intensità di interesse risk-free con la stessa tecnica a partire dal 2001-01-24. A titolo di esempio, nella Figura 2 è mostrato il qqplot dei residui standardizzati relativi al modello GARCH stimato in quattro differenti date (2006-05-02, 2008-10-24, 2010-01-27, 2014-06-13) relativamente alle quali gli ordini ottenuti con il criterio Akaike sono le coppie (2,2), (2,1), (3,2) e (1,1).

Il backtesting del VaR

Le metodologie per il backtesting, descritte nella sezione 3, sono state implementate in ciascuna giornata t di quotazione del contratto strutturato a partire dal 2012-06-21, risulta una dimensione campionaria di 889 giorni di osservazione. Dopo aver calcolato il VaR giornaliero in ciascun istante t , è stata individuata la successione $I_t(\alpha)$ delle violazioni, quindi per la validazione del modello di stima sono state calcolate le tre tipologie di statistiche, LR, GMM e MCS, indagando

⁸Se la quotazione del tasso è negativa, per l'attualizzazione è stato usato un valore prossimo a zero, 10^{-5} , mentre per la generazione degli scenari è stata considerata la variazione assoluta. Dal 2015-02-09 il tasso Euribor a 1 mese è negativo.

Il tasso di interesse risk-free in t relativo alla generica epoca di pagamento h_j è ottenuto interpolando linearmente la struttura dei tassi di interesse risk-free desunta dai tassi swap osservati in t .

separatamente le proprietà uc e ind (o iid). Come suggerito da Candelon et al. (2011) per il test GMM è stato posto $p = 3$ se $\alpha = 5\%$, mentre è $p = 5$ se $\alpha = 1\%$. In riferimento al test MCS_{cc} è stato utilizzato un valore del fattore di peso $a = 0.5$.

La Figura 3 mostra la sequenza delle violazioni, distinte per metodologia di stima della volatilità e per livello di confidenza, ottenute utilizzando un numero di scenari $N = 260$. In tutti i casi si osserva che le violazioni si addensano nell'ultimo periodo, è più evidente per il VaR calcolato al 95% e nei casi in cui la volatilità è stimata con il modello EWMA l'aggregazione delle violazioni si osserva anche in altri sottoperiodi. I risultati delle procedure di backtesting sono riportati nella Tabella 2; per ciascun modello di volatilità sono calcolati il tasso di violazione (violatio ratio) come il rapporto tra il numero di violazioni al VaR e il numero di giorni di osservazione e il p-value associato a ciascuna statistica test, ottenuto con la tecnica descritta nella sezione 3 con $M = 10000$, dove i simboli *, **, *** indicano il livello di significatività statistica del 10%, 5% e 1%, rispettivamente.

Il modello EWMA mostra un forte scostamento del tasso di fallimento per entrambi i livelli di copertura, il test di Christoffersen non rifiuta l'ipotesi di indipendenza del primo ordine in 4 casi su 6, ma il test GMM rivela dipendenza di ordine superiore, supportata anche dal test MCS da cui si può presumibilmente dedurre anche la mancanza della proprietà i.d, questi risultati sono confermati dal valore delle statistiche per la proprietà cc. In corrispondenza di un'ampiezza di 260 osservazioni il test GMM e MCS per l'i.i.d. portano a un esito diverso, ma come precisato nell'introduzione il test GMM risulta più robusto se $\alpha = 1\%$.

Il modello RM produce tassi di violazione crescenti all'aumentare del valore del parametro λ . In riferimento a un tasso di copertura del 5% il modello RM con $\lambda = 0.94$ mostra una sovrastima del rischio essendo il numero di violazioni osservate uguale a 34 con uno scostamento per difetto da quello atteso di 9 che porta al rifiuto della proprietà uc ma con un valore del p-value associato alle tre tipologie di statistiche vicino al valore soglia del 10%, mentre al livello di copertura dell'1% risulta essere il miglior performante essendo lo scostamento solo pari a 3. In entrambi i casi le statistiche test LR e GMM non portano al rifiuto della proprietà di indipendenza, mentre dal test MCS risulta che la sequenza delle violazioni è non i.d. con livelli di significatività diversi. In corrispondenza degli altri due valori del parametro λ il modello sottostima il rischio e il p-value delle statistiche per la verifica dell'ipotesi uc è superiore al 10% solo per $\lambda = 0.97$ e un livello di copertura del 5%. In tutti gli altri casi è rifiutata anche l'ipotesi i.i.d. per tramite del test GMM o del test MCS e di conseguenza anche la proprietà cc. Il modello RM con $\lambda = 0.99$ produce valori delle statistiche test che più si avvicinano a quelle ottenute dal modello EWMA poiché per λ prossimo a uno la media esponenziale tende alla media semplice.

Se la volatilità è stimata con il modello GARCH, al livello di copertura del 5% anche in questo caso il numero dei fallimenti osservato si discosta, ma in eccesso, da quello atteso di un valore pari a 9 e non viene rifiutata l'ipotesi uc, ma dai test GMM_{ind} e MCS_{iid} si deduce che la sequenza

delle violazioni è non i.i.d. a un livello di significatività maggiore dell'1%. Si ha invece un valore del p-value associato a ciascuna statistica test che è statisticamente significativo se il tasso di copertura è dell'1%.

Le risultanze di sottostima e sovrastima relative a ciascun modello sono confermate dai test unilaterali MCS_{uc}^{lt} e MCS_{uc}^{ut} , inoltre si osserva che la ridefinizione della proprietà uc non produce effetti diversi.

È stato quindi aumentato il numero N degli scenari storici e è stata condotta un'analisi simile. La Figura 4 e la Tabella 3 mostrano la sequenza delle violazioni e i risultati delle procedure di backtesting ottenuti utilizzando un numero di scenari $N = 520$, la Figura 5 e la Tabella 4 si riferiscono a un numero di scenari $N = 780$. A eccezione del modello EWMA, dal confronto si osserva un valore inferiore del tasso di violazione in corrispondenza del numero maggiore di scenari storici e in generale sono confermati i risultati di rifiuto dell'ipotesi uc, ind (iid) e cc ottenuti in precedenza con variazioni poco significative del p-value, tranne in un caso.

Per un livello di copertura dell'1% dal modello RM con $\lambda = 0.94$ si ottiene una buona stima del VaR. Il tasso di fallimento è prossimo all'1% quindi l'ipotesi uc non è rifiutata; la statistica di Christoffersen per l'indipendenza del primo ordine sembra generare un errore del secondo tipo e al crescere del numero degli scenari aumenta il p-value delle statistiche GMM_{ind} e MCS_{iid} , per cui in corrispondenza del valore $N = 780$ non è rifiutata l'ipotesi i.i.d. e dunque il modello può essere considerato appropriato in termini di accuratezza statistica delle stime. Anche il p-value della statistica test GMM per l'indipendenza ottenuto stimando la volatilità con il modello GARCH è superiore al 10%, ma la sequenza delle violazioni ottenuta risulta essere ancora non i.d. a un livello di significatività del 5%.

La Figura 6 mostra gli andamenti della volatilità sull'intero orizzonte temporale considerato stimata con tre modelli, quelli ottenuti con la stessa tipologia differenziando per ampiezza storica o per valore del decay factor sono simili. Si osserva che il modello EWMA produce un sentiero più regolare, non accidentato e non caratterizzato da picchi di valore, a differenza degli altri due che considerando l'autocorrelazione delle osservazioni rispondono più prontamente a variazioni improvvise del mercato. Nella figura 7 sono disegnate la traiettoria ottenuta con il modello EWMA considerando una finestra storica di 260 osservazioni e quella ottenuta stimando il modello RM con $\lambda = 0.99$, dai quali come osservato in precedenza si ottengono risultati dei tests somiglianti. Un valore elevato del decay factor comporta un adeguamento meno rapido a condizioni di mercato più recenti.

In generale, in aggiunta sull'eventuale malfunzionamento del modello pesa anche l'utilizzo della simulazione storica che può incidere sulla mancanza di accuratezza statistica delle stime del VaR. I risultati ottenuti nell'ambito dello studio proposto mostrano che un numero di dati storici corrispondente a tre anni è adeguato per avere stime corrette del VaR, in coerenza con quanto affermato da Pritsker (2006) il quale dimostra che una lunghezza temporale più breve

può non essere adeguata poiché può non includere un numero sufficiente di osservazioni estreme.

7 Conclusioni

Nel lavoro è proposto uno studio empirico per il calcolo del VaR di un prodotto strutturato basato sul metodo della simulazione storica full valuation, utilizzato a esempio per misurare il rischio associato all'investimento ai fini dell'informativa precontrattuale.

Distinguendo in termini di metodologia per la quantificazione della volatilità dell'indice sottostante della componente derivata, per indagare sulla correttezza e sull'affidabilità delle stime del VaR ottenute dal modello sono implementate tre diverse procedure di backtesting che applicate alla sequenza delle violazioni osservate consentono di indagare sulle proprietà di copertura incondizionata, di indipendenza e di identica distribuzione e di copertura condizionata. Le procedure sono quella classica, diffusamente applicata nella pratica, di Christoffersen, quella basata sui polinomi ortonormali associati alla distribuzione geometrica proposta da Candelon et al. (2011) e quella introdotta recentemente da Ziggel et al. (2014) che segue un'impostazione teorica differente. Il test di Christoffersen per l'indipendenza consente di individuare solo quella del primo ordine, quindi utilizzando il test di Candelon sono individuate sequenze di violazioni che mostrano una dipendenza di ordine maggiore, infine il test di Ziggel è usato per specificare quelle che non sono identicamente distribuite.

I risultati ottenuti in riferimento al contratto strutturato considerato mostrano che il metodo di simulazione storica full valuation produce stime del VaR giornaliero al livello di copertura dell'1% statisticamente accurate se la volatilità dell'indice è misurata applicando il modello esponenziale di RiskMetrics caratterizzato da un valore del decay factor $\lambda = 0.94$ e se i dati storici per la generazione degli scenari corrispondono a tre anni di osservazioni, in accordo con quanto affermato da Pritsker (2006).

Riferimenti bibliografici

- [1] Black, F., Scholes, M., *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, 81(3), 1973.
- [2] Bollerslev, T., *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*, Journal of Econometrics (31), 307-327, 1986.
- [3] Campbell, S.D., *A Review of Backtesting and Backtesting Procedures*, Journal of Risk, 9(2), 1-18, 2007.
- [4] Candelon, B., Colletaz, G., Hurlin, C., Tokpavi, S., *Backtesting Value-at-Risk: A GMM Duration based test*, Journal of Financial Econometrics, 9(2), 314-343, 2011.
- [5] Christoffersen, P., *Evaluating Interval Forecasts*, International Economic Review, 39(4), 841-862, 1998.
- [6] Christoffersen, P., Pelletier, D., *Backtesting Value-at-Risk: A Duration-Based Approach*, Journal of Financial Econometrics, 2(1), 84-108, 2004.
- [7] Engle, R., Manganelli, S., *CAViaR: Conditional Autoregressive Value-at-Risk by Regression Quantiles*, Journal of Business and Economic Statistics, 22, 367-381, 2004.
- [8] Haas, M., *Improved Duration-Based Backtesting of Value-at-Risk*, Journal of Risk, 8(2), 17-36, 2005.
- [9] Hull, J.C., *Options, Futures, and Other Derivatives*, Ninth Edition, Pearson Education, 2015.
- [10] Jorion, P., *Value-at-Risk*, Third edition, McGraw-Hill, 2007.
- [11] Kupiec, P.H., 1995. *Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Management Models*, The Journal of Derivatives 3(2), 73-84, 1995.
- [12] Lopez, J.A., *Methods for evaluating Value-at-Risk estimates*, Federal Reserve bank of San Francisco Economic Review, 2, 3-17, 1999.
- [13] Poldoskij, C., Ziggel, D., *New Tests for Jumps in Semimartingale Models*, Journal of Banking & Finance, 13(1), 362-377, 2009.
- [14] Pritsker, M., *The Hidden Dangers of Historical Simulation*, Journal of Banking & Finance, 30(2), 561-582, 2006.
- [15] Sarma, M., Thomas, S., Shah A., *Selection of Value-at-Risk Models*, Journal of Forecasting, 22, 337-358, 2003.

- [16] Ziggel, D., Berens, T., Wieb, G.N.F., Wied, D., *A new set of improved Value-at-Risk backtests*, Journal of Banking & Finance, 48, 29-41, 2014.

Figura 1: Log-rendimenti giornalieri

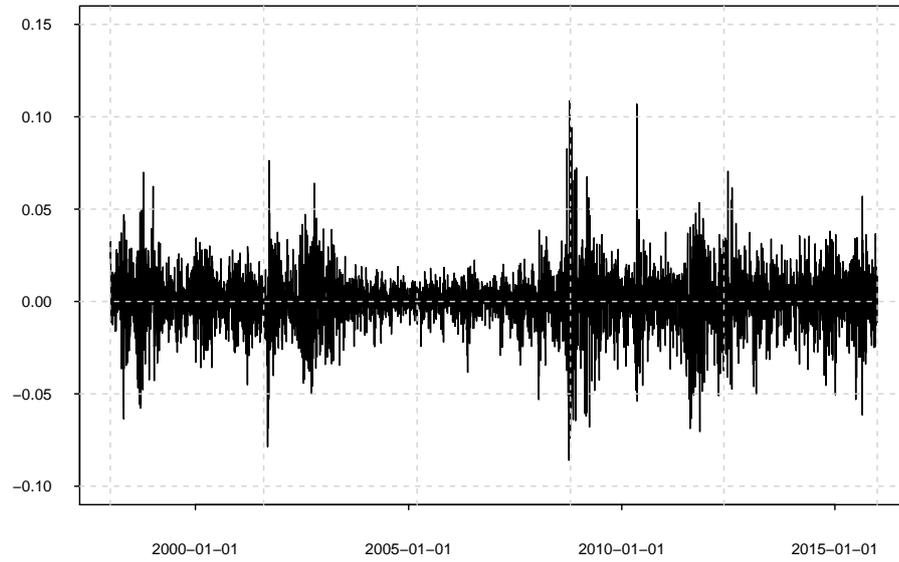


Tabella 1: Statistiche descrittive

Minimum	-8.500%
1st quantile	-0.775%
Median	0.052%
Mean	-0.003%
3rd quantile	0.812%
Maximum	10.87%
Volatility	1.569%
Skewness	-0.084
Kurtosis	6.768
Mean p.a.	-0.743%
Volatility p.a.	25.302%
Maximum Drawdown	-75.329%

Figura 2: QQplot dei residui standardizzati

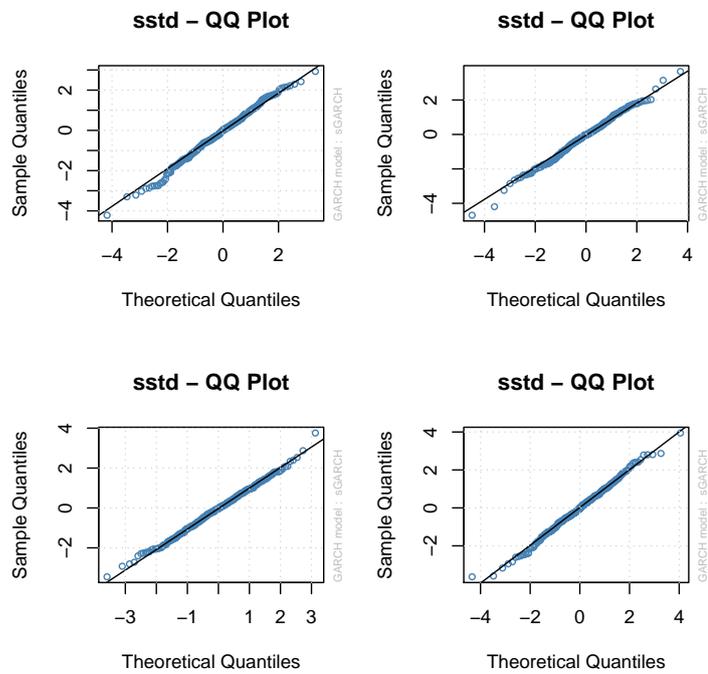


Figura 3: Violazioni al VaR, $N = 260$

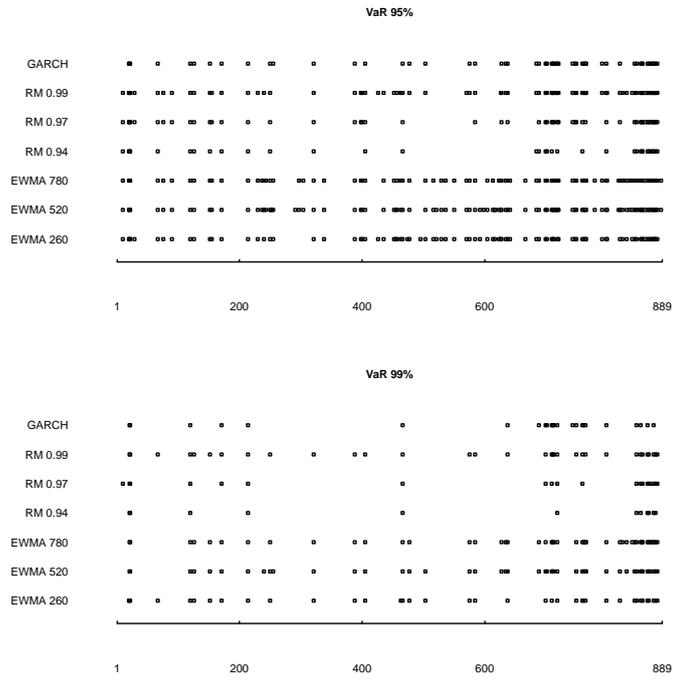


Figura 4: Violazioni al VaR, $N = 520$

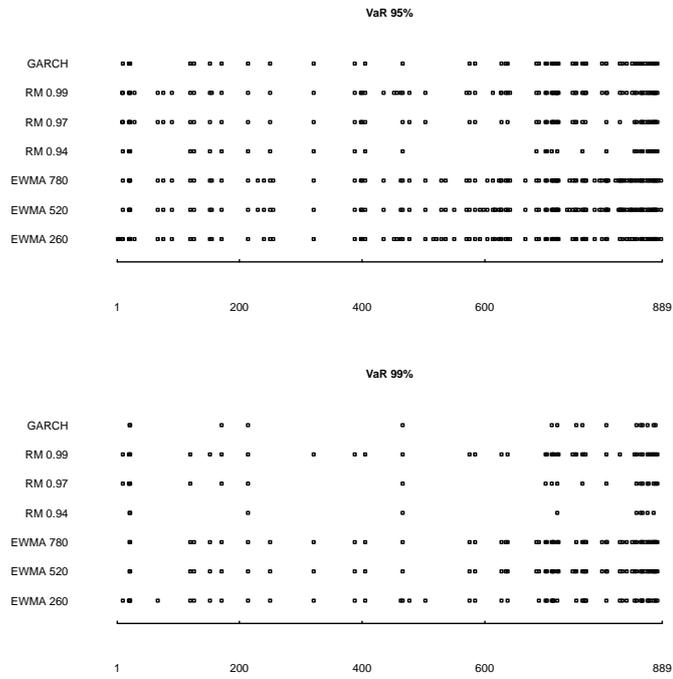


Tabella 2: Backtesting - $N = 260$

Modelli di VaR	EWMA			RM			GARCH
	250	520	780	0.94	0.97	0.99	
<i>Panel A: VaR 95%</i>							
<i>Viol. Ratio</i>	10.236%	11.586%	10.686%	3.825%	5.962%	8.436%	6.074%
LR _{uc}	0.000***	0.000***	0.000***	0.098*	0.200	0.000***	0.154
LR _{ind}	0.629	0.993	0.466	0.217	0.323	0.514	0.355
LR _{cc}	0.000***	0.000***	0.000***	0.172	0.324	0.000***	0.303
GMM _{uc}	0.000***	0.000***	0.000***	0.072*	0.201	0.001***	0.162
GMM _{ind}	0.001***	0.000***	0.000***	0.868	0.124	0.001***	0.086*
GMM _{cc}	0.001***	0.001***	0.000***	0.000***	0.112	0.001***	0.085*
MCS _{uc} ^{lt}	1.000	1.000	1.000	0.046**	0.900	1.000	0.924
MCS _{uc} ^{ut}	0.000***	0.000***	0.000***	0.954	0.100	0.000***	0.076*
MCS _{uc} ^{tt}	0.000***	0.000***	0.000***	0.092*	0.200	0.000***	0.153
MCS _{iid}	0.028**	0.018**	0.041**	0.001***	0.003***	0.002***	0.025**
MCS _{cc}	0.000***	0.000***	0.000***	0.000***	0.005***	0.000***	0.024**
<i>Panel B: VaR 99%</i>							
<i>Viol. Ratio</i>	4.274%	5.287%	5.174%	1.350%	2.250%	3.712%	2.700%
LR _{uc}	0.000***	0.000***	0.000***	0.378	0.001***	0.000***	0.000***
LR _{ind}	0.794	0.081*	0.080*	0.060*	0.095*	0.129	0.063*
LR _{cc}	0.000***	0.000***	0.000***	0.146	0.004***	0.000***	0.001***
GMM _{uc}	0.000***	0.000***	0.000***	0.343	0.013**	0.001***	0.005***
GMM _{ind}	0.000***	0.000***	0.000***	0.181	0.001***	0.000***	0.000***
GMM _{cc}	0.000***	0.000***	0.000***	0.181	0.002***	0.000***	0.001***
MCS _{uc} ^{lt}	1.000	1.000	1.000	0.833	0.999	1.000	1.000
MCS _{uc} ^{ut}	0.000	0.000***	0.000***	0.167	0.001***	0.000***	0.000***
MCS _{uc} ^{tt}	0.000***	0.0000***	0.000***	0.334	0.002***	0.000***	0.000***
MCS _{iid}	0.404	0.033**	0.010**	0.045**	0.002***	0.307	0.001***
MCS _{cc}	0.000***	0.000***	0.000***	0.069*	0.000***	0.000***	0.000***

Figura 5: Violazioni al VaR, $N = 780$

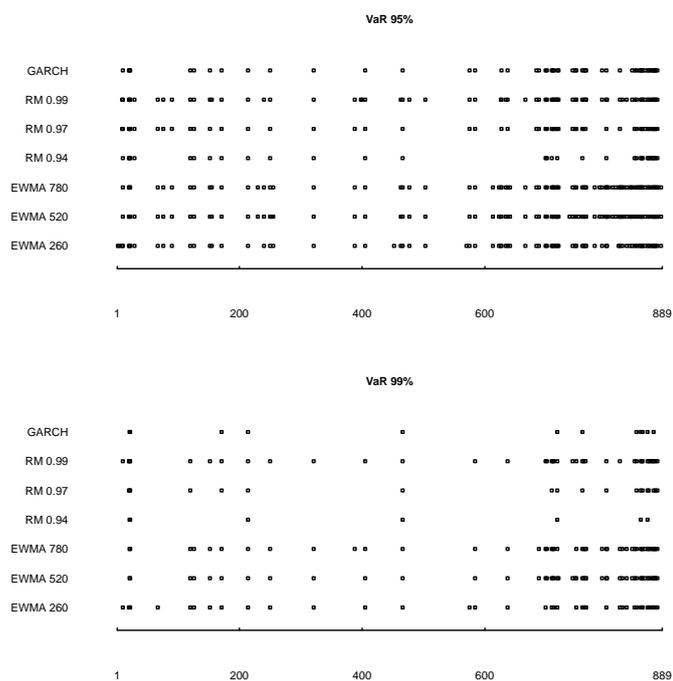


Figura 6: Volatilità

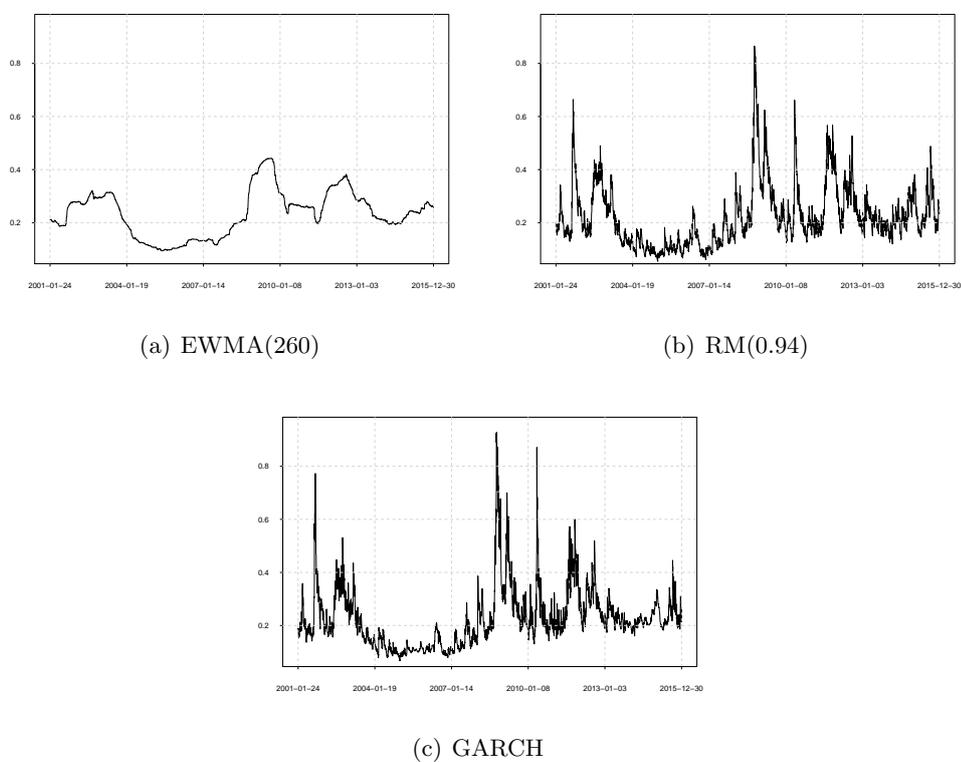


Tabella 3: Backtesting - $N = 520$

Modelli di VaR	EWMA			RM			GARCH
	250	520	780	0.94	0.97	0.99	
<i>Panel A: VaR 95%</i>							
<i>Viol. Ratio</i>	10.461%	11.136%	10.574%	3.712%	6.524%	8.549%	6.412%
LR _{uc}	0.000***	0.000***	0.000***	0.072*	0.050**	0.000***	0.058*
LR _{ind}	0.677	0.769	0.732	0.199	0.279	0.124	0.256
LR _{cc}	0.000***	0.000***	0.000***	0.121	0.121	0.000***	0.138
GMM _{uc}	0.000***	0.000***	0.000***	0.048**	0.055*	0.000***	0.074*
GMM _{ind}	0.001***	0.000***	0.000***	0.939	0.028**	0.000***	0.026**
GMM _{cc}	0.002***	0.002***	0.002***	0.000***	0.029**	0.002***	0.034**
MCS _{uc} ^{lt}	1.000	1.000	1.000	0.032**	0.981	1.000	0.970
MCS _{uc} ^{ut}	0.000***	0.000***	0.000***	0.969	0.019**	0.000***	0.030**
MCS _{uc} ^{tt}	0.000***	0.000***	0.000***	0.063*	0.039**	0.000***	0.059*
MCS _{iid}	0.003***	0.001**	0.001**	0.001***	0.016**	0.002***	0.000***
MCS _{cc}	0.000***	0.000***	0.000***	0.000***	0.000***	0.007***	0.000**
<i>Panel B: VaR 99%</i>							
<i>Viol. Ratio</i>	5.512%	6.074%	5.849%	1.125%	2.362%	4.724%	1.800%
LR _{uc}	0.000***	0.000***	0.000***	0.696	0.001***	0.000***	0.035**
LR _{ind}	0.070*	0.054**	0.043**	0.039**	0.032**	0.108	0.079***
LR _{cc}	0.000***	0.000***	0.000***	0.179	0.000***	0.000***	0.033**
GMM _{uc}	0.000****	0.000***	0.000***	0.682	0.011**	0.000***	0.055*
GMM _{ind}	0.000***	0.000***	0.000***	0.396	0.000***	0.000***	0.014**
GMM _{cc}	0.000***	0.000***	0.000***	0.396	0.001***	0.000***	0.020**
MCS _{uc} ^{lt}	1.000	1.000	1.000	0.635	0.999	1.000	0.985
MCS _{uc} ^{ut}	0.000	0.000***	0.000***	0.365	0.001***	0.000***	0.015**
MCS _{uc} ^{tt}	0.000***	0.000***	0.000***	0.730	0.001***	0.000***	0.030**
MCS _{iid}	0.070*	0.001***	0.001***	0.068*	0.002***	0.006***	0.007***
MCS _{cc}	0.000***	0.000***	0.000***	0.238	0.000***	0.000***	0.002***

Figura 7: Volatilità, EWMA(260) ... e RM(0.99) –



Tabella 4: Backtesting - $N = 780$

Modelli di VaR	EWMA			RM			GARCH
	250	520	780	0.94	0.97	0.99	
<i>Panel A: VaR 95%</i>							
<i>Viol. Ratio</i>	9.224%	10.236%	9.786%	3.600%	6.187%	8.099%	5.849%
LR _{uc}	0.000***	0.000***	0.000***	0.044**	0.114	0.000***	0.264
LR _{ind}	0.590	0.575	0.607	0.177	0.209	0.051*	0.155
LR _{cc}	0.000***	0.000***	0.000***	0.079*	0.198	0.000***	0.244
GMM _{uc}	0.000***	0.000***	0.000***	0.031**	0.128	0.002***	0.255
GMM _{ind}	0.001***	0.001***	0.001***	0.906	0.071*	0.001***	0.114
GMM _{cc}	0.001***	0.002***	0.002***	0.000***	0.071*	0.002***	0.128
MCS _{uc} ^{lt}	1.000	1.000	1.000	0.022**	0.057*	1.000	0.870
MCS _{uc} ^{ut}	0.000***	0.000***	0.000***	0.978	0.943	0.000***	0.130
MCS _{uc} ^{tt}	0.000***	0.000***	0.000***	0.044**	0.114	0.000***	0.261
MCS _{iid}	0.001***	0.000**	0.000**	0.001***	0.004*	0.001***	0.001***
MCS _{cc}	0.000***	0.000***	0.000***	0.000***	0.004***	0.000***	0.001***
<i>Panel B: VaR 99%</i>							
<i>Viol. Ratio</i>	4.724%	5.511%	5.287%	0.787%	2.137%	4.387%	1.350%
LR _{uc}	0.000***	0.000***	0.000***	0.578	0.002***	0.000***	0.378
LR _{ind}	0.070*	0.022**	0.014**	0.012**	0.022**	0.000***	0.060*
LR _{cc}	0.000***	0.000***	0.000***	0.063*	0.002***	0.000***	0.146
GMM _{uc}	0.000***	0.000***	0.000***	0.533	0.017**	0.000***	0.338
GMM _{ind}	0.000***	0.000***	0.000***	0.774	0.001***	0.000***	0.183
GMM _{cc}	0.000***	0.000***	0.000***	0.784	0.002***	0.000***	0.184
MCS _{uc} ^{lt}	1.000	1.000	1.000	0.250	0.999	1.000	0.833
MCS _{uc} ^{ut}	0.000	0.000***	0.000***	0.750	0.001***	0.000***	0.167
MCS _{uc} ^{tt}	0.000***	0.0000***	0.000***	0.500	0.003***	0.000***	0.334
MCS _{iid}	0.027**	0.001***	0.002***	0.332	0.003***	0.012*	0.047**
MCS _{cc}	0.000***	0.000***	0.000***	0.549	0.000***	0.000***	0.071*