

# Il modello di Hofmann per la tariffazione in base all'esperienza nei rami danni

Fabio Grasso

*Dipartimento di Scienze Statistiche  
Università degli Studi di Roma "La Sapienza"*

## Abstract

*Bonus-Malus systems are largely used in non-life insurance (in particular, in automobile insurance) to implement experience rating. The distribution of the number of claims is known to be well fitted by mixed Poisson processes. In particular, the Poisson-gamma and the Poisson-Inverse Gaussian distributions are frequently used in actuarial literature. In this paper we consider a three parameters distribution encompassing the Poisson-gamma and the Poisson-Inverse Gaussian distributions. This distribution is due to Hofmann and has been proposed by Walhin and Paris in order to construct a Bonus-Malus system. According to this distribution the construction of the Bonus-Malus system is easily done using the Bayes theorem and the form of the mixed Poisson distribution. Several good properties justify the adoption of this model. Numerical results are given.*

## Keywords

*Bonus-Malus systems. Mixed Poisson processes. Hofmann distribution.*

## 1. Introduzione

E' ben noto come anche nelle assicurazioni contro i danni l'assicuratore attui una "personalizzazione" del premio (in particolare, *equo*) sulla base di un certo numero di caratteristiche del rischio adeguatamente valutabili all'epoca di stipulazione del contratto. Tale procedimento, detto *personalizzazione a priori del premio*, si prefigge di:

- a) suddividere i rischi in gruppi, detti *classi di rischio* (o, anche, *classi tariffarie*), caratterizzati al loro interno da una forte omogeneità;
- b) determinare, per ciascuna classe di rischio, un *premio collettivo*.

Ai fini della definizione delle classi di rischio, costituite da rischi "analoghi", si possono utilmente adottare opportuni *metodi statistici* sia per individuare un certo numero di caratteristiche del rischio, dette *fattori di rischio* (o, anche, *variabili tariffarie*), in grado di influenzare in misura significativa la sinistrosità del rischio sia per individuare, in corrispondenza di ciascun fattore di rischio, un certo numero di *modalità* (qualitative oppure quantitative).

Per quanto riguarda invece la determinazione del premio collettivo si introduce generalmente una funzione, detta *modello di tariffazione*, che associa ad ogni classe di rischio un premio. Tale funzione dipende da alcuni parametri, detti *relatività*, i quali sono stimati sulla base dei dati disponibili.

Nell'assicurazione di responsabilità civile autoveicoli, ad esempio, è frequente l'uso di un *modello moltiplicativo di tariffazione* e vengono usualmente presi in considerazione (alcuni tra) i seguenti fattori di rischio:

- tipo, uso, potenza fiscale, alimentazione, etc. dell'autoveicolo;
- zona territoriale di immatricolazione dell'autoveicolo;
- età, sesso, professione, etc. dell'assicurato.

L'esperienza delle assicurazioni contro i danni evidenzia però come all'interno di ciascuna classe di rischio, malgrado l'impiego di un elevato numero di fattori di rischio, rimanga una più o meno rilevante *eterogeneità* dovuta ad alcune caratteristiche del rischio che, sebbene non adeguatamente valutabili a priori, sono in grado di influenzarne in misura significativa la relativa sinistrosità.

Nell'assicurazione di responsabilità civile autoveicoli, ad esempio, si segnalano le seguenti caratteristiche:

- la cosiddetta "attitudine alla guida" dell'autoveicolo e la conoscenza del codice stradale da parte dell'assicurato;
- i chilometri annui percorsi dall'autoveicolo.

In relazione ad un assegnato rischio appare pertanto opportuno procedere ad un adeguamento nel tempo del premio, sulla base dell'esperienza di sinistrosità relativa al dato rischio. Tale procedimento, detto *personalizzazione a posteriori del premio* (o, anche, *tariffazione in base all'esperienza*), si prefigge di:

- a) passare da un premio collettivo, relativo ad una classe di rischio, ad un *premio individuale*, relativo al singolo rischio;
- b) ottenere una sequenza di premi, detti *premi di esperienza*, che siano nel tempo sempre più commisurati all'effettiva sinistrosità del rischio.

Nella pratica assicurativa l'esperienza di sinistrosità considerata ai fini dell'adeguamento nel tempo del premio riguarda generalmente solo il *numero di sinistri*. In conseguenza, ai fini del passaggio dal premio collettivo al premio individuale si introduce generalmente un *aggravio di premio* per i rischi che hanno denunciato uno o più sinistri in un dato periodo di riferimento (ad esempio un anno), mentre si applica uno *sconto di premio* per i rischi che non hanno denunciato sinistri nel medesimo periodo di riferimento.

Ai fini dell'adeguamento nel tempo del premio, nella letteratura attuariale viene proposto l'utilizzo di *schemi inferenziali bayesiani*. In particolare, tenuto anche conto della relativa semplicità d'uso a fini inferenziali, è generalmente ipotizzato che il processo di arrivo dei sinistri sia del tipo mistura di Poisson con funzione misturante gamma (o, anche, *modello Poisson-gamma*). Alcuni recenti studi hanno tuttavia evidenziato l'opportunità di adottare talvolta, in alternativa, il *modello Poisson-gaussiana inversa* (si vedano: Besson e Partrat, 1992; Grasso, 1995).

I premi di esperienza ottenuti tramite un adeguamento bayesiano si rivelano però improponibili sul mercato assicurativo, innanzitutto per evidenti ragioni di carattere commerciale. In conseguenza l'adeguamento del premio deve essere realizzato mediante meccanismi dinamici di tariffazione di più agevole comprensione da parte degli assicurati. In particolare, si segnala il *sistema Bonus-Malus* mediante il quale il premio di esperienza bayesiano è approssimato con un premio che è funzione della classe di merito occupata dal rischio all'epoca di adeguamento.

Con specifico riferimento all'assicurazione di responsabilità civile autoveicoli, una valutazione fondata su idonei criteri attuariali evidenzia i limiti tecnici dei sistemi Bonus-Malus presenti nei mercati assicurativi (si vedano: Grasso, 1997; Lemaire, 1995, 1998; Picech e Sigalotti, 1996; Verico, 2002). In particolare, essi:

- a) non sono autonomamente in condizione di mantenere nel tempo l'iniziale *equilibrio tecnico* tra premi ed esborsi per sinistri;
- b) non garantiscono ai migliori rischi gli *sconti* che promettono;
- c) introducono un *effetto di solidarietà* tra i rischi particolarmente elevato e, soprattutto, sbilanciato a sfavore dei rischi esenti da sinistri (ingiustificato anche nel caso di copertura obbligatoria).

Alcuni recenti studi (si vedano: Coene e Doray, 1996; Grasso, 1997) hanno tuttavia evidenziato come la "distanza" esistente tra i premi di esperienza bayesiani ed i corrispondenti premi Bonus-Malus possa essere ridotta in misura significativa se il *modello di ottimizzazione* scelto per la costruzione del sistema Bonus-Malus:

- considera l'intera struttura del sistema e non solamente un suo particolare elemento costitutivo (regole evolutive, coefficienti di premio, ...);
- incorpora ulteriori condizioni, più strettamente connesse agli aspetti commerciali e gestionali della tariffazione.

Un modello di ottimizzazione così strutturato è in condizione di individuare un sistema Bonus-Malus nel quale l'effetto di solidarietà è sensibilmente ridotto e, soprattutto, caratterizzato da una più equilibrata distribuzione tra i rischi del portafoglio (si veda Grasso, 1998).

Tali risultati permettono quindi di poter affermare che la tariffazione in base all'esperienza realizzata mediante un modello di adeguamento bayesiano è di fondamentale importanza anche ai fini di una proposta commerciale. In tale ambito una particolare attenzione va poi dedicata all'analisi della sinistrosità dei rischi ed alla conseguente *scelta di un modello probabilistico* per un'adeguata rappresentazione della sinistrosità, tenuto anche conto che la base statistica disponibile nei rami danni è non di rado, almeno in Italia, ben poco soddisfacente.

Nella scelta di un modello vanno considerati anche due ulteriori importanti aspetti. Il primo aspetto riguarda il fatto che la base probabilistica adottata ha influenza sul "*peso*" dell'esperienza di sinistrosità ai fini della determinazione del premio e questo ha evidenti effetti sul livello di integrazione tra personalizzazione a priori e personalizzazione a posteriori nella tariffazione. Il secondo aspetto riguarda invece l'*asimmetria* (positiva) della distribuzione del numero di sinistri, la quale ha anch'essa un rilevante ruolo nelle valutazioni attuariali poiché è noto, in particolare, come una sua eventuale sottostima possa determinare non trascurabili conseguenze negative sull'equilibrio di solvibilità del portafoglio di rischi.

Tutto ciò premesso, il presente lavoro focalizza la sua attenzione su un modello probabilistico dovuto ad Hofmann, 1955, e solo recentemente considerato ai fini di una possibile adozione in ambito assicurativo (si veda Wahlin e Paris, 1999). Esso:

- a) realizza un buon accostamento a varie realtà assicurative (in particolare, nell'ambito dell'assicurazione di responsabilità civile autoveicoli);
- b) assume come casi particolari sia il modello Poisson-gamma sia il modello Poisson-gaussiana inversa;
- c) offre una flessibilità di comportamento sufficientemente ampia in termini di "*peso*" dell'esperienza di sinistrosità nella tariffazione e di asimmetria della distribuzione del numero di sinistri.
- d) è caratterizzato da una conveniente semplicità d'uso a fini inferenziali ed ottiene, nell'ambito della teoria della credibilità, un'espressione che dà un'immediata valutazione del "*peso*" dell'esperienza di sinistrosità.

Il presente lavoro è così organizzato. Nel paragrafo 2 è brevemente richiamato il problema generale della tariffazione in base all'esperienza mediante l'utilizzo di uno schema inferenziale bayesiano (in particolare, vengono presentati i modelli Poisson-gamma e Poisson-gaussiana inversa). Nel paragrafo 3 è sinteticamente descritto il modello di Hofmann, del quale sono evidenziate le caratteristiche e le proprietà che lo rendono particolarmente efficace per la costruzione di una tariffa personalizzata in base all'esperienza. Nel paragrafo 4, a partire da alcuni dati riguardanti la sinistrosità osservata nell'assicurazione di responsabilità civile autoveicoli in Italia nel 2001, il comportamento del modello di Hofmann è posto a confronto con quello dei modelli Poisson-gamma e Poisson-gaussiana inversa. I risultati ottenuti, commentati nel paragrafo 5, mettono in evidenza l'opportunità di considerare il modello di Hofmann ai fini delle esigenze tariffarie.

## 2. Schemi inferenziali bayesiani

### 2.1 Premesse

Si consideri un portafoglio costituito da un numero sufficientemente grande di assicurazioni contro i danni contemporaneamente stipulate, contraddistinte da un eguale periodo di copertura (ad esempio un anno) e relative a *rischi analoghi*, con riferimento alla classificazione (a priori) effettuata al momento dell'ingresso in assicurazione. In tali ipotesi, pertanto, i rischi del portafoglio appartengono ad una data classe di rischio.

Assunta l'epoca di stipulazione dei contratti come "origine" (tempo 0) e l'anno come unità di misura del tempo, si scelga "a caso" un rischio nel portafoglio e sia  $P_1$  il *premio equo* determinato, al tempo 0, sulla base della classe di rischio di assegnazione. Il premio (collettivo)  $P_1$  è anche detto *premio (equo) iniziale*.

Al tempo  $t$ , vale a dire con riferimento all'anno di contratto  $t+1$  ( $t=1,2,\dots$ ), sia  $P_{t+1}$  il *premio di esperienza* ottenuto nell'ipotesi che ai fini dell'adeguamento del premio (iniziale) si consideri la sola osservazione relativa al numero di sinistri denunciati nei primi  $t$  anni. In generale, vale quindi la

$$(1) \quad P_{t+1} = f(P_1; n_1, \dots, n_t),$$

dove  $n_h$  ( $h=1,\dots,t$ ) è il numero di sinistri denunciati nell'anno  $h$ , mentre  $f$  indica una funzione crescente al crescere di  $P_1$  e di  $n_1, \dots, n_t$ .

Ai fini di un'adeguata modellizzazione del problema dell'adeguamento nel tempo del premio, con riferimento al rischio in esame, si indichi con  $X_h$  il *risarcimento globale aleatorio* a carico dell'assicuratore nell'anno  $h$  ( $h=1,2,\dots$ ). Si ha

$$(2) \quad X_h = \sum_{i=0}^{N_h} Y_{h,i},$$

dove:

- $N_h$  è il numero aleatorio di *sinistri denunciati* (in particolare, esso coincide con il numero aleatorio di *sinistri verificatisi* in assenza di *autoliquidazione dei sinistri*);
- $Y_{h,i}$  ( $i=0,1,\dots$ ;  $Y_{h,0} \equiv 0$ ) è il *risarcimento* aleatorio a carico dell'assicuratore in relazione al sinistro  $i$ -esimo in ordine cronologico.

Le determinazioni possibili della variabile aleatoria (v.a.)  $N_h$  sono i numeri naturali, mentre quelle della v.a.  $Y_{h,i}$  ( $i \neq 0$ ) sono i numeri reali positivi.

Si assuma poi che, per ogni  $h$ , le v.a.  $N_h$  e  $Y_{h,i}$  ( $i \neq 0$ ) siano tra loro indipendenti e che, per ogni determinazione  $k$  ( $k \neq 0$ ) della v.a.  $N_h$ , i risarcimenti  $Y_{h,1}, Y_{h,2}, \dots$  siano indipendenti ed identicamente distribuiti, con valore atteso unitario.

Nell'ipotesi che la base tecnica e le condizioni contrattuali di copertura siano costanti nel tempo, per ogni  $h$  si ha

$$(3) \quad E(X_h) = E(N_h) = \bar{X}.$$

Posto inoltre che la personalizzazione a posteriori del premio riguardi la sola componente numero di sinistri (denunciati), ai fini della descrizione di  $N_h$  può essere utilmente impiegata una *mistura di distribuzioni poissoniane* (o, anche, *mistura di Poisson*). Vale, quindi, la

$$(4) \quad \Pr\{N_h = k\} = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} dF_\Lambda(\lambda), \quad k = 0, 1, \dots,$$

dove il parametro aleatorio  $\Lambda$ , a valori reali positivi, è rappresentativo della *propensione al sinistro* del rischio in esame.

La funzione di ripartizione di  $\Lambda$ ,  $F_\Lambda$ , è detta *funzione peso* (della mistura) e descrive l'eterogeneità dei rischi del portafoglio connessa alla componente numero di sinistri. In generale, tale eterogeneità è attribuibile ad alcuni fattori di rischio non adeguatamente valutabili all'epoca di stipulazione del contratto.

Nelle date ipotesi probabilistiche le v.a.  $N_1, N_2, \dots$  sono identicamente distribuite, con distribuzione poissoniana di parametro aleatorio  $\Lambda$ , e, inoltre, indipendenti subordinatamente ad ogni possibile evento  $\{\Lambda = \lambda\}$ .

In conseguenza, per ogni  $h$ , si ha il valore atteso

$$(5) \quad E(N_h) = E(\Lambda)$$

e la varianza

$$(6) \quad \text{var}(N_h) = E(\Lambda) + \text{var}(\Lambda),$$

dove, coerentemente con le usuali evidenze statistiche, è  $\text{var}(N_h) > E(N_h)$ .

Scelta un'opportuna forma funzionale per la funzione peso  $F_\Lambda$ , il modello in esame fornisce generalmente un buon accostamento alla sinistrosità osservata (con riferimento alla recente esperienza dell'assicurazione di responsabilità civile autoveicoli in Italia si veda Grasso, 1995).

## 2.2 Adeguamento del premio

Il modello mistura di Poisson è inoltre convenientemente impiegabile, nell'ambito di uno *schema inferenziale bayesiano*, ai fini della determinazione del premio di esperienza

$$(7) \quad P_{t+1} = E(N_{t+1} | n_1, \dots, n_t) = E(\Lambda | n_1, \dots, n_t),$$

a partire dal premio iniziale

$$(8) \quad P_1 = E(\Lambda).$$

In tali ipotesi probabilistiche si ha anche

$$(9) \quad \text{var}(N_{t+1} | n_1, \dots, n_t) = E(\Lambda | n_1, \dots, n_t) + \text{var}(\Lambda | n_1, \dots, n_t).$$

Il descritto sistema di premi di esperienza soddisfa, tra le altre, le seguenti due fondamentali *proprietà*:

- il premio di esperienza dipende dal numero,  $n$ , di sinistri complessivamente denunciati nei primi  $t$  anni ma non dalla loro distribuzione temporale; la coppia di valori  $(t, n)$  è pertanto un *riassunto esaustivo* dell'osservazione ed il premio di esperienza può essere convenientemente indicato con  $P_{t+1}^{(n)}$ ;
- il premio medio di esperienza per l'anno  $t+1$  è eguale, per ogni  $t$ , al premio iniziale  $P_1$ , garantendo così l'*equilibrio tecnico* tra i premi ed i risarcimenti relativi al rischio considerato (e, più in generale, all'insieme dei rischi del dato portafoglio).

Per le applicazioni assicurative sono di particolare importanza, nell'ambito delle descritte ipotesi probabilistiche, i due modelli sinteticamente presentati nei seguenti paragrafi 2.3 e 2.4.

## 2.3 Modello Poisson-gamma

Si assuma che al tempo 0 sia assegnata al parametro  $\Lambda$  una *distribuzione gamma* di parametri  $\alpha$  e  $\beta$  ( $\alpha, \beta > 0$ ), con densità

$$(10) \quad f_{\Lambda}(x) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

In tale ipotesi, anche nota come *modello Poisson-gamma*, le v.a.  $N_1, N_2, \dots$  hanno identica *distribuzione binomiale negativa* di parametri  $\alpha$  e  $\beta/\beta+1$ . In base al

*teorema di Bayes*, inoltre, la distribuzione a posteriori del parametro  $\Lambda$  è anch'essa di tipo gamma, di parametri  $\alpha+n$  e  $\beta+t$ .

In accordo al modello Poisson-gamma, a partire dal premio iniziale

$$(11) \quad P_1 = \frac{\alpha}{\beta},$$

si ottiene il premio di esperienza

$$(12) \quad P_{t+1}^{(n)} = \frac{\alpha + n}{\beta + t}.$$

La (12) è una particolare *formula di credibilità*, del tipo

$$(13) \quad P_{t+1}^{(n)} = \delta_{t+1} \binom{n}{t} + (1 - \delta_{t+1}) P_1,$$

con *fattore (relativo) di credibilità*

$$(14) \quad \delta_{t+1} = \frac{t}{\beta + t}.$$

## 2.4 Modello Poisson-gaussiana inversa

Si assuma, in alternativa al caso precedente, che al tempo 0 venga assegnata al parametro  $\Lambda$  una *distribuzione gaussiana inversa* di parametri  $\nu$  e  $\kappa$  ( $\nu, \kappa > 0$ ), con densità

$$(15) \quad f_{\Lambda}(x) = \frac{\nu}{\sqrt{2\pi\kappa\lambda^3}} e^{-\frac{(\lambda-\nu)^2}{2\kappa\lambda}}, \quad \lambda > 0.$$

Tale ipotesi probabilistica è anche nota come *modello Poisson-gaussiana inversa*. In base al teorema di Bayes, la distribuzione a posteriori del parametro  $\Lambda$  è di tipo *gaussiana inversa generalizzata*.

In accordo al modello Poisson-gaussiana inversa, a partire dal premio iniziale

$$(16) \quad P_1 = \nu,$$



si ottiene il premio di esperienza

$$(17) \quad P_{t+1}^{(n)} = \frac{v}{(1+2\kappa t)^{1/2}} \frac{K_{n+\frac{1}{2}} \left[ \frac{v}{\kappa} (1+2\kappa t)^{1/2} \right]}{K_{n-\frac{1}{2}} \left[ \frac{v}{\kappa} (1+2\kappa t)^{1/2} \right]},$$

dove  $K_\varepsilon(u)$ , con  $u>0$ , è una *funzione di Bessel modificata di terza specie* di ordine reale  $\varepsilon$ .

## 2.5 Misura dell'asimmetria

Il confronto tra i premi di esperienza corrispondenti ad una medesima storia di sinistrosità, espressa dalla coppia di valori  $(t,n)$ , pone chiaramente in luce come il modello Poisson-gaussiana inversa attribuisca, rispetto al modello Poisson-gamma, penalizzazioni di premio più severe nel caso di un indice di sinistrosità molto elevato e, invece, adeguamenti di premio ridotti in caso contrario (si veda Grasso, 1997).

Tali differenze derivano dal fatto che il modello Poisson-gaussiana inversa è caratterizzato, a parità di valore atteso e varianza, da una maggiore *asimmetria* (positiva) rispetto al modello Poisson-gamma.

Infatti, nell'ipotesi che la v.a.  $N_h$  ( $h=1,2,\dots$ ) sia adeguatamente rappresentata da una distribuzione mistura di Poisson, il *coefficiente di asimmetria (di Fisher)* di tale distribuzione,  $\gamma_1(N_h)$ , assume la seguente espressione:

$$(18) \quad \gamma_1(N_h) = \frac{1}{\sigma^3} \left[ 3\sigma^2 - 2\mu + \frac{\eta(\sigma^2 - \mu)^2}{\mu} \right],$$

dove, posto  $\mu = E(N_h)$  e  $\sigma = [\text{var}(N_h)]^{1/2}$ , si ha:

- $\eta = 2$  nel caso del modello Poisson-gamma;
- $\eta = 3$  nel caso del modello Poisson-gaussiana inversa.

### 3. Modello di Hofmann

#### 3.1 Premesse

Ai fini della descrizione del *modello di Hofmann* (si vedano: Hofmann, 1955; Walhin e Paris, 1999) occorre innanzitutto considerare il numero aleatorio,  $N(t)$ , di sinistri denunciati dal rischio in esame nell'intervallo di tempo  $(0,t]$ . Posto  $t=1$  si ha, in particolare, il riferimento annuale considerato nel paragrafo 2. Ovviamente vale poi la

$$(19) \quad N_t = N(t) - N(t-1), \quad t = 1, 2, \dots$$

In tale ipotesi si consideri la probabilità,  $Z(k,t)$ , che il dato rischio denunci  $k$  sinistri nell'intervallo di tempo  $(0,t]$ , vale a dire

$$(20) \quad Z(k, t) = \Pr\{N(t) = k\}.$$

E' ben noto (si vedano: Hofmann, 1955; Thyron, 1960) come ogni distribuzione di probabilità di una variabile intera non negativa (in particolare, quindi, la distribuzione di  $N(t)$ ) definita come

$$(21) \quad Z(k, t) = e^{-\theta(t)},$$

$$(22) \quad Z(k, t) = (-1)^k \frac{t^k}{k!} Z^{(k)}(0, t), \quad k = 1, 2, \dots,$$

dove  $\theta(t)$ , chiamata *funzione di Bernstein*, è una funzione infinitamente derivabile e tale che

$$(23) \quad \theta(t) = \int_0^t \theta'(u) du,$$

$$(24) \quad \theta(0) = 0,$$

$$(25) \quad (-1)^k \theta^{(k)}(t) \geq 0 \quad \text{per ogni } t > 0,$$

sia una *mistura di Poisson*, vale a dire

$$(26) \quad Z(k, t) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dF_\Lambda(\lambda), \quad k = 0, 1, \dots$$

Per quanto concerne la forma funzionale scelta per la funzione  $\theta(t)$ , Hofmann ha adottato come espressione di  $\theta'(t)$  la seguente funzione (a tre parametri):

$$(27) \quad \theta'(t) = \frac{p}{(1+ct)^a},$$

con  $c, p > 0$  e  $a \geq 0$ .

Dalla (27) si ottiene

$$(28) \quad \theta(t) = \begin{cases} pt & a = 0 \\ \frac{p((1+ct)^{1-a} - 1)}{c(1-a)} & 0 < a < 1 \\ \left(\frac{p}{c}\right) \ln(1+ct) & a = 1 \\ \frac{p(1 - (1+ct)^{1-a})}{c(1-a)} & a > 1 \end{cases}$$

La *distribuzione di Hofmann*, caratterizzata dalla funzione di Bernstein (28), è riconducibile ad alcune note distribuzioni. In particolare, al variare del parametro  $a$ , si segnalano le seguenti:

- per  $a = 0$  si ha la *distribuzione di Poisson*;
- per  $a = 1/2$  si ha la *distribuzione Poisson-gaussiana inversa*;
- per  $a = 1$  si ha la *distribuzione Poisson-gamma*;
- per  $a = 2$  si ha la *distribuzione di Polya-Aeppli*.

### 3.2 Formule ricorsive

La descritta distribuzione di probabilità di  $N(t)$  può anche essere identificata con una *distribuzione di Poisson composta* ponendo

$$(29) \quad N(t) = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{L(t)},$$

dove  $L(t)$  è una variabile aleatoria con *distribuzione di Poisson* di parametro  $\theta(t)$  ed indipendente dalle variabili aleatorie  $\xi_i$ , essendo queste intere, positive, indipendenti, identicamente distribuite e, inoltre, appartenenti alla classe di distribuzioni  $(a,b,1)$  (si veda Walhin e Paris, 2001).

In forza di tale risultato è possibile fare riferimento al noto *algoritmo di Panjer* (si veda Panjer, 1981) per ottenere le seguenti *formule ricorsive* per il calcolo delle probabilità di  $N(t)$ :

$$(30) \quad Z(0,t) = e^{-\theta(t)},$$

$$(31) \quad Z(k+1,t) = \frac{pt}{(k+1)(1+ct)^a} \sum_{i=0}^k \frac{\Gamma(a+i)}{\Gamma(a)! i!} \left( \frac{ct}{1+ct} \right)^i Z(k-i,t), \quad k=0,1,\dots$$

### 3.3 Calcolo dei principali momenti

Per quanto concerne il calcolo dei principali momenti del modello di Hofmann, si ottengono (si veda Thyron, 1960) il valore atteso

$$(32) \quad E[N(t)] = pt$$

e la varianza

$$(33) \quad \text{var}[N(t)] = pt(1+cat).$$

A partire dalla (19), posto  $N_h = N(h) - N(h-1)$ ,  $h=1,2,\dots$ , si ottengono pertanto il valore atteso

$$(34) \quad E(N_h) = p$$

e la varianza

$$(35) \quad \text{var}(N_h) = p(1+ca).$$

### 3.4 Adeguamento del premio

In accordo al modello di Hofmann, a partire dal premio iniziale

$$(36) \quad P_1 = E(N_1) = p$$

si ottiene il premio di esperienza

$$(37) \quad P_{t+1}^{(n)} = E[N_{t+1} | N(t) = n] = \left( \frac{n+1}{t} \right) \left[ \frac{Z(n+1, t)}{Z(n, t)} \right].$$

Adottando poi la *stima bayesiana lineare* per il premio di esperienza (37), si ricava la seguente approssimazione:

$$(38) \quad P_{t+1}^{(n)} = \delta_{t+1} \left( \frac{n}{t} \right) + (1 - \delta_{t+1}) P_1,$$

dove è

$$(39) \quad \delta_{t+1} = \frac{t}{\eta + t},$$

con  $\eta = (ac)^{-1}$ , la quale fornisce, nell'ambito della *teoria della credibilità*, una valutazione del "peso" dell'esperienza di sinistrosità.

Confrontando la (38) con la (13) e, quindi, la (39) con la (14), è immediata la valutazione comparata del "peso" che i modelli, rispettivamente, Hofmann e Poisson-gamma attribuiscono all'esperienza di sinistrosità ai fini della determinazione del premio.

#### 4. Risultati numerici

Il confronto tra i modelli teorici presi in considerazione nei paragrafi 2 e 3 viene ora sviluppato con il supporto di alcuni risultati numerici. A tale fine, facendo riferimento all'assicurazione di responsabilità civile autoveicoli, sono state selezionate due serie di osservazioni riguardanti portafogli di imprese di assicurazioni contro i danni operanti in Italia nel ramo 10 ("responsabilità civile autoveicoli terrestri").

I dati, riportati nella seguente tabella 1, fanno riferimento all'anno 2001. In particolare, si osserva che i dati dell'esempio 1 rappresentano una situazione di sinistrosità molto vicina a quella media nazionale, mentre i dati dell'esempio 2 rappresentano una situazione di bassa sinistrosità, quale può riscontrarsi in un portafoglio di rischi appartenenti, in un sistema Bonus-Malus, ad una delle migliori classi di merito.

Tabella 1 – *Distribuzioni osservate del numero di sinistri*

<b>k</b>	<b>Distribuzione osservata (esempio 1)</b>	<b>Distribuzione osservata (esempio 2)</b>
<b>0</b>	90964	92754
<b>1</b>	8198	6722
<b>2</b>	702	461
<b>3</b>	122	52
<b>4</b>	10	9
<b>5</b>	4	2
<b>Totale</b>	100000	100000

Si è successivamente proceduto a stimare i parametri dei modelli considerati. A tale fine è stato impiegato il *metodo della massima verosimiglianza* per i modelli Poisson-gamma e Poisson-gaussiana inversa, mentre è stato scelto il metodo di stima proposto da Kestemont e Paris, 1985, per il modello di Hofmann.

Ricavate le stime dei parametri, sono state determinate le distribuzioni teoriche associate ai modelli considerati. I risultati ottenuti sono riportati nella tabella 2 (con riferimento all'esempio 1) e nella tabella 8 (con riferimento all'esempio 2).

Al fine di descrivere appieno la capacità dei modelli di spiegare l'andamento della sinistrosità nel portafoglio, si è poi calcolato, per ognuno di essi, il *coefficiente di asimmetria*, essendo note le conseguenze (negative per l'assicuratore) derivanti da un'eventuale sottostima della sinistrosità nella *coda destra* della distribuzione.

I risultati ottenuti per la stima dei parametri e per i coefficienti di asimmetria dei vari modelli sono riportati nella tabella 3 (con riferimento all'esempio 1) e nella tabella 9 (con riferimento all'esempio 2).

La fase successiva dell'applicazione ha riguardato la valutazione della bontà dell'adattamento dei modelli proposti ai dati osservati. A questo fine è stato adottato il *test  $\chi^2$  di goodness of fit*, malgrado le stime dei parametri della distribuzione di Hofmann non fossero stime di massima verosimiglianza. Kestemont e Paris hanno proposto di utilizzare, in alternativa al test  $\chi^2$ , le seguenti due statistiche:

$$(40) \quad T = S^2 - p(1 + ac),$$

$$(41) \quad V = k_3 - (pc^2a(a + 1) + 3pca + p),$$

dove  $S^2$  è la *varianza campionaria* e  $k_3$  è la *statistica di Fisher*. Entrambe le statistiche hanno media nulla e, inoltre, la varianza è facilmente calcolabile.

Kestemont e Paris hanno mostrato che le conclusioni alle quali si arriva sulla base di tali statistiche confermano i risultati ottenuti con il test  $\chi^2$ , pertanto si è deciso di applicare comunque il test  $\chi^2$ . Tuttavia si è reso necessario stabilire quale modalità di esecuzione del test fosse più opportuno seguire, vale a dire:

- effettuare il test  $\chi^2$  come se anche le stime dei parametri della distribuzione di Hofmann fossero stime di massima verosimiglianza;
- scegliere la soluzione indicata da Gossiaux e Lemaire, 1981, i quali, nel confrontare distribuzioni teoriche per le quali i parametri erano stati stimati sia con il metodo della massima verosimiglianza sia con stimatori non normali ed efficienti, hanno stabilito che un confronto valido può essere ottenuto supponendo date le stime e verificando successivamente la qualità dell'adattamento effettuando un test  $\chi^2$  con  $m$  gradi di libertà, essendo  $m$  il numero delle classi nelle quali la distribuzione è stata suddivisa.

In conclusione si è deciso di applicare entrambe le metodologie, rispettivamente indicate *test A* e *test B*. I risultati dell'applicazione del test  $\chi^2$  sono riportati nella tabella 4 (esempio 1) e nella tabella 10 (esempio 2).

Le tabelle 5, 6 e 7 (esempio 1) e le tabelle 11, 12 e 13 (esempio 2) presentano infine i *premi equi di esperienza* ottenuti mediante l'applicazione, rispettivamente, dei modelli Poisson-gamma, Poisson-gaussiana inversa e Hofmann.

### a) Esempio 1

Con riferimento alla distribuzione osservata riportata nella seconda colonna della tabella 1, nelle seguenti tabelle 2, 3, ..., 7 sono presentati i risultati (distribuzioni teoriche, stima dei parametri, bontà dell'adattamento, premi di esperienza) ottenuti mediante la descrizione di tale distribuzione con i modelli Poisson-gamma (PG), Poisson-gaussiana inversa (PGI) e Hofmann.

Tabella 2 – *Distribuzione osservata e distribuzione teorica del numero di sinistri per i modelli Poisson-gamma, Poisson-gaussiana inversa e Hofmann*

<b>k</b>	<b>Distribuzione osservata</b>	<b>Modello PG</b>	<b>Modello PGI</b>	<b>Modello Hofmann</b>
<b>0</b>	90964	90979.47	90981.05	90964.00
<b>1</b>	8198	8117.47	8132.23	8198.00
<b>2</b>	702	809.65	781.26	716.90
<b>3</b>	122	83.59	91.11	96.45
<b>4</b>	10	8.78	12.22	18.66
<b>5</b>	4	0.93	1.79	4.39
<b>Totale</b>	100000	99999.89	99999.66	99998.40

Tabella 3 – *Stima dei parametri e coefficiente di asimmetria per i modelli Poisson-gamma, Poisson-gaussiana inversa e Hofmann*

	<b>Distribuzione osservata</b>	<b>Modello PG</b>	<b>Modello PGI</b>	<b>Modello Hofmann</b>
<b>Parametri</b>		$\alpha=0.80920$ $\beta=8.06944$	$\nu=0.10028$ $\kappa=0.12933$	$p=0.10028$ $a=0.22204$ $c=0.61757$
<b>Media</b>	0.10028			
<b>Varianza</b>	0.11358			
<b>Asimmetria</b>	3.84796	3.71250	3.77021	3.86914

Tabella 4 – *Stima della bontà di adattamento ai dati osservati da parte dei modelli Poisson-gamma, Poisson-gaussiana inversa e Hofmann*

		<b>Modello PG</b>	<b>Modello PGI</b>	<b>Modello Hofmann</b>
$\chi^2$		34.66	22.18	11.13
<b>Test A</b>	<b>Gradi libertà</b>	2	3	2
	<b>p-value</b>	2.98e-8	5.98e-5	0.0038
<b>Test B</b>	<b>Gradi libertà</b>	4	5	5
	<b>p-value</b>	5.46e-7	4.84e-4	0.0489

Tabella 5 – *Premi equi di esperienza (modello Poisson-gamma)*

<b>t   n</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	88.97	198.93	308.88	418.83	528.78	638.74
<b>2</b>	80.14	179.17	278.20	377.24	476.27	575.30
<b>3</b>	72.90	162.98	253.07	343.16	433.24	523.33
<b>4</b>	66.86	149.48	232.10	314.73	397.35	479.97
<b>5</b>	61.74	138.04	214.34	290.64	366.95	443.25
<b>6</b>	57.35	128.23	199.11	269.99	340.86	411.74
<b>7</b>	53.55	119.72	185.90	252.07	318.25	384.42
<b>8</b>	50.22	112.27	174.33	236.38	298.44	360.50
<b>9</b>	47.27	105.69	164.12	222.54	280.96	339.38
<b>10</b>	44.66	99.85	155.03	210.22	265.41	320.60
<b>20</b>	28.75	64.27	99.80	135.33	170.85	206.38
<b>50</b>	13.90	31.07	48.24	65.41	82.59	99.76



Tabella 6 – Premi equi di esperienza (modello Poisson-gaussiana inversa)

<b>t   n</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	89.13	191.90	348.87	535.11	732.12	933.06
<b>2</b>	81.18	166.18	294.66	447.36	609.73	775.80
<b>3</b>	75.04	147.66	255.99	385.09	522.96	664.34
<b>4</b>	70.11	133.49	226.98	338.59	458.23	581.21
<b>5</b>	66.03	122.27	204.38	302.53	408.08	516.83
<b>6</b>	62.60	113.14	186.25	273.73	368.08	465.49
<b>7</b>	59.65	105.53	171.37	250.19	335.43	423.59
<b>8</b>	57.08	99.10	158.94	230.60	308.27	388.75
<b>9</b>	54.82	93.57	148.37	214.02	285.32	359.31
<b>10</b>	52.80	88.76	139.29	199.81	265.67	334.12
<b>20</b>	40.25	61.14	89.17	122.63	159.45	198.19
<b>50</b>	26.79	36.05	47.68	61.33	76.50	92.69

Tabella 7 – Premi equi di esperienza (modello Hofmann)

<b>t   n</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	89.87	174.41	402.51	771.53	1172.01	1566.06
<b>2</b>	83.65	144.82	296.55	549.42	837.66	1124.76
<b>3</b>	79.23	127.17	238.41	426.26	649.30	875.07
<b>4</b>	75.86	115.26	201.86	348.69	528.92	714.65
<b>5</b>	73.15	106.60	176.83	295.73	445.66	603.03
<b>6</b>	70.90	99.96	158.62	257.47	384.86	521.00
<b>7</b>	68.99	94.68	144.79	228.66	338.65	458.25
<b>8</b>	67.33	90.34	133.91	206.25	302.45	408.77
<b>9</b>	65.86	86.71	125.13	188.37	273.40	368.81
<b>10</b>	64.56	83.62	117.89	173.80	249.63	335.90
<b>20</b>	56.25	66.49	82.26	105.89	138.55	178.92
<b>50</b>	46.36	50.65	56.21	63.45	72.76	84.42

## b) Esempio 2

Con riferimento alla distribuzione osservata riportata nella terza colonna della tabella 1, nelle seguenti tabelle 8, 9, ..., 13 sono presentati i risultati (distribuzioni teoriche, stima dei parametri, bontà dell'adattamento, premi di esperienza) ottenuti

mediante la descrizione di tale distribuzione con i modelli Poisson-gamma (PG), Poisson-gaussiana inversa (PGI) e Hofmann.

Tabella 8 – *Distribuzione osservata e distribuzione teorica del numero di sinistri per i modelli Poisson-gamma, Poisson-gaussiana inversa e Hofmann*

<b>k</b>	<b>Distribuzione osservata</b>	<b>Modello PG</b>	<b>Modello PGI</b>	<b>Modello Hofmann</b>
<b>0</b>	92754	92763.82	92765.93	92754.00
<b>1</b>	6722	6674.79	6679.05	6722.00
<b>2</b>	461	516.85	504.12	461.93
<b>3</b>	52	40.97	45.58	51.19
<b>4</b>	9	3.28	4.72	8.56
<b>5</b>	2	0.27	0.53	1.77
<b>Totale</b>	100000	99999.98	99999.93	99999.45

Tabella 9 – *Stima dei parametri e coefficiente di asimmetria per i modelli Poisson-gamma, Poisson-gaussiana inversa e Hofmann*

	<b>Distribuzione osservata</b>	<b>Modello PG</b>	<b>Modello PGI</b>	<b>Modello Hofmann</b>
<b>Parametri</b>		$\alpha=0.86783$ $\beta=11.06082$	$\nu=0.07846$ $\kappa=0.09376$	$p=0.07846$ $a=0.19107$ $c=0.51520$
<b>Media</b>	0.07846			
<b>Varianza</b>	0.08612			
<b>Asimmetria</b>	4.17987	4.03572	4.07656	4.16495

Tabella 10 – *Stima della bontà di adattamento ai dati osservati da parte dei modelli Poisson-gamma, Poisson-gaussiana inversa e Hofmann*

		<b>Modello PG</b>	<b>Modello PGI</b>	<b>Modello Hofmann</b>
$\chi^2$		24.97	11.17	0.07
<b>Test A</b>	<b>Gradi libertà</b>	2	2	2
	<b>p-value</b>	3.78e-6	0.0038	0.9656
<b>Test B</b>	<b>Gradi libertà</b>	4	4	5
	<b>p-value</b>	5.10e-5	0.0247	0.9999

Tabella 11 – Premi equi di esperienza (modello Poisson-gamma)

<b>t   n</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	91.71	197.38	303.06	408.74	514.41	620.09
<b>2</b>	84.69	182.27	279.86	377.44	475.03	572.61
<b>3</b>	78.66	169.31	259.95	350.60	441.24	531.89
<b>4</b>	73.44	158.07	242.69	327.32	411.94	496.57
<b>5</b>	68.87	148.23	227.58	306.94	386.30	465.65
<b>6</b>	64.83	139.54	214.24	288.95	363.65	438.36
<b>7</b>	61.24	131.81	202.38	272.95	343.52	414.09
<b>8</b>	58.03	124.90	191.76	258.63	325.50	392.36
<b>9</b>	55.14	118.67	182.20	245.74	309.27	372.80
<b>10</b>	52.52	113.04	173.55	234.07	294.59	355.10
<b>20</b>	35.61	76.64	117.68	158.71	199.74	240.78
<b>50</b>	18.11	38.99	59.86	80.73	101.61	122.48

Tabella 12 – Premi equi di esperienza (modello Poisson-gaussiana inversa)

<b>t   n</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	91.77	192.40	345.67	527.53	720.40	917.40
<b>2</b>	85.28	172.19	302.97	458.55	624.23	793.84
<b>3</b>	80.00	156.48	270.34	406.07	551.12	699.93
<b>4</b>	75.59	143.88	244.57	364.79	493.66	626.14
<b>5</b>	71.84	133.52	223.68	331.45	447.30	566.62
<b>6</b>	68.60	124.83	206.40	303.97	409.12	517.60
<b>7</b>	65.76	117.43	191.84	280.91	377.11	476.53
<b>8</b>	63.24	111.04	179.41	261.28	349.89	441.61
<b>9</b>	61.00	105.46	168.67	244.37	326.47	411.56
<b>10</b>	58.97	100.54	159.28	229.65	306.09	385.43
<b>20</b>	45.88	71.04	105.10	145.81	190.53	237.45
<b>50</b>	31.04	42.56	57.19	74.44	93.57	113.95

Tabella 13 – Premi equi di esperienza (modello Hofmann)

<b>t   n</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	92.37	175.17	423.69	852.93	1317.27	1768.62
<b>2</b>	87.34	149.14	319.33	623.18	969.74	1309.82
<b>3</b>	83.65	132.94	259.59	489.43	763.84	1037.06
<b>4</b>	80.76	121.75	221.17	402.74	628.07	856.37
<b>5</b>	78.39	113.48	194.49	342.47	532.13	727.97
<b>6</b>	76.40	107.07	174.92	298.41	460.96	632.12
<b>7</b>	74.69	101.93	159.98	264.97	406.24	557.91
<b>8</b>	73.19	97.69	148.19	238.82	362.99	498.81
<b>9</b>	71.86	94.12	138.66	217.88	328.03	450.70
<b>10</b>	70.67	91.07	130.80	200.79	299.27	410.81
<b>20</b>	62.92	74.01	92.16	121.22	163.56	217.03
<b>50</b>	53.36	58.05	64.34	72.87	84.35	99.32

## 5. Osservazioni conclusive

I risultati numerici presentati nel paragrafo 4 evidenziano come i tre modelli presi in considerazione realizzano un buon adattamento ai dati osservati. In particolare, il modello di Hofmann produce l'adattamento migliore: infatti, anche nel caso dell'esempio 1, dove l'adattamento non è eccellente (il p-value è molto basso), si osserva come esso sia comunque ben superiore a quello fornito dagli altri modelli.

E' interessante rilevare poi come il coefficiente di asimmetria ottenuto nell'ipotesi Hofmann sia molto prossimo a quello osservato in entrambe le situazioni considerate, mentre i modelli Poisson-gamma e Poisson-gaussiana inversa tendono a sottostimare l'asimmetria (positiva) della distribuzione osservata, con evidenti possibili effetti negativi per l'assicuratore.

Per quanto concerne i premi (equi) di esperienza, i risultati ottenuti pongono in luce l'esistenza di una relazione tra l'asimmetria della distribuzione e l'importo di tali premi. Infatti, ad una più accentuata asimmetria corrisponde un innalzamento dei premi situati sia nella coda sinistra sia nella coda destra della distribuzione dei premi. In altri termini, in corrispondenza di un più elevato coefficiente di asimmetria si osservano:

- a) più elevate penalizzazioni di premio per i rischi caratterizzati da una più elevata sinistrosità;
- b) più bassi sconti di premio per i rischi caratterizzati dall'assenza di sinistrosità (o, comunque, da una sinistrosità molto bassa).

Un utile confronto può essere fatto in termini di andamento nel tempo del premio di esperienza per un rischio esente da sinistri. I risultati ottenuti, con riferimento all'esempio 2 (risultati analoghi si ottengono anche nel caso dell'esempio 1), sono riportati nella seguente tabella 14 ed evidenziano come il modello di Hofmann attribuisca a tale rischio un bonus decisamente inferiore rispetto a quello risultante dall'applicazione degli altri due modelli.

Tabella 14 – *Premi equi di esperienza per un rischio esente da sinistri (modelli Poisson-gamma, Poisson-gaussiana inversa e Hofmann)*

<b>t</b>	<b>Modello PG</b>	<b>Modello PGI</b>	<b>Modello Hofmann</b>
<b>1</b>	91.71	91.77	92.37
<b>2</b>	84.69	85.28	87.34
<b>3</b>	78.66	80.00	83.65
<b>4</b>	73.44	75.59	80.76
<b>5</b>	68.87	71.84	78.39
<b>6</b>	64.83	68.60	76.40
<b>7</b>	61.24	65.76	74.69
<b>8</b>	58.03	63.24	73.19
<b>9</b>	55.14	61.00	71.86
<b>10</b>	52.52	58.97	70.67
<b>20</b>	35.61	45.88	62.92
<b>50</b>	18.11	31.04	53.36

A conclusione del lavoro si osserva che il modello di Hofmann, tenuto conto delle sue caratteristiche teoriche e dei risultati numerici ottenuti (anche rispetto a varie altre distribuzioni osservate di sinistrosità, qui per brevità non riportate), appare una soluzione particolarmente efficace ai fini della costruzione di un sistema di premi di esperienza nell'ambito delle assicurazioni dei rami danni.

Con riferimento poi alle eventuali difficoltà, di ordine computazionale, connesse all'impiego del modello di Hofmann in sostituzione del modello Poisson-gamma, è da ritenere che l'accessibilità ai moderni calcolatori faccia sì che la maggiore semplicità del modello Poisson-gamma (anche rispetto al modello Poisson-gaussiana inversa) non possa comunque costituire un elemento discriminante ai fini della sua scelta.

## Bibliografia

Besson J., Partrat C., *Trend et Systemes de Bonus-Malus*, ASTIN Bulletin, vol.22, 11-31, 1992.

Bonsdorff H., *On the Convergence Rate of Bonus-Malus Systems*, ASTIN Bulletin, vol.22, 217-223, 1992.

Campana A., *La distribuzione generalizzata di Poisson per la rappresentazione della sinistrosità nell'assicurazione R.C.Auto*, Atti del XXIII Convegno Annuale AMASES, Rende (Cosenza), 83-95, 1999.

Coene G., Doray L., *A Financially Balanced Bonus-Malus System*, ASTIN Bulletin, vol.26, 107-116, 1996.

Gigante P., Sigalotti L., *Tariffazione a priori e sistemi bonus-malus per assicurazioni RCA*, Testo di un seminario tenuto al Dipartimento di Matematica per le Decisioni, Firenze, 2000.

Kestemont R., Paris J., *Sur L'ajustement du Nombre de Sinistres*, Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungs-Mathematiker, vol.85, 157-164, 1985.

Gossiaux A., Lemaire J., *Méthodes d'ajustement de distributions de sinistres*, Bulletin des actuaires suisses, vol.1, 87-95, 1981.

Grasso F., *Sulla costruzione di un sistema Bonus-Malus nella assicurazione R.C.Auto*, Atti del XXI Convegno Annuale AMASES, Roma, 303-318, 1997.

Grasso F., *Calculating the Expense Loading in a Bonus-Malus System*, Ricerca Operativa, vol.28, 121-138, 1998.

Grasso F., *Sulla misura della solidarietà in alcuni sistemi Bonus-Malus*, Atti del VI Congresso Nazionale degli Attuari, Milano, 381-394, 1998.

Grasso F., *Tariffazione in base all'esperienza e sistemi Bonus-Malus*, Dipartimento di Matematica per le Decisioni, n.8, Firenze, 2002.

Hofmann M., *Über Zusammengesetzte Poisson-Prozesse Und Ihre Anwendungen in Der Unfallversicherung*, Bulletin of the Swiss Actuaries, vol.55, 499-575, 1955.

Kestemont R., Paris J., *Sur L'ajustement du Nombre de Sinistres*, Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungs-Mathematiker, vol.85, 157-164, 1985.

Klugman S., Panjer H., Willmot G., *Loss Models. From Data to Decisions*, Wiley Series in Probability and Statistics, New York, 1998.

Lemaire J., *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*, Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/London, 1995.

- Lemaire J., *Bonus-Malus Systems: the European and Asian Approach to Merit-Rating*, North American Actuarial Journal, vol.2, 26-47, 1998.
- Lo Presti E., *Proposta e confronto di modelli per la tariffazione in base all'esperienza nell'assicurazione R.C.Auto*, Tesi di Laurea in Scienze Statistiche ed Attuariali, Università degli Studi di Firenze, Firenze, 2002.
- Panjer H., *Recursive Evaluation of a Family of Compound Distribution*, ASTIN Bulletin, vol. 12, 22-26, 1981.
- Picech L., Sigalotti L., *Valutazioni attuariali su sistemi Bonus-Malus: la personalizzazione*, Centro di Ricerche Assicurative e Previdenziali , n.13, Milano, 1996.
- Pitacco E., *Sull'adeguamento dei premi in tariffe assicurative "personalizzate"*, Istituto di Matematica Finanziaria, n.22, Trieste, 1978.
- Sigalotti L., *Confronto tra alcune tariffe Bonus-Malus*, Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, vol.54, n.1-2, 27-53, 1991.
- Thyrion P., *Contribution à l'Etude du Bonus Pour Non-Sinistre En Assurance Auto*, ASTIN Bulletin, vol. 1, 143-162, 1960.
- Verico P., *Bonus-Malus Systems: "Lack of Transparency" and Adequacy Measure*, ASTIN Bulletin, vol. 32, 315-318, 2002.
- Walhin J., Paris J., *Using Mixed Poisson Processes in connection with Bonus-Malus Systems*, ASTIN Bulletin, vol.29, 81-99, 1999.
- Walhin J., Paris J., *The Practical Replacement of a Bonus-Malus System*, ASTIN Bulletin, vol.31, 317-335, 2001.
- Willmot G., Sundt B., *On Posterior Probabilities and Moments in Mixed Poisson Process*, Scandinavian Actuarial Journal, 139-146, 1989.