

**La funzione di densità campionaria per procedure di confronti multipli
nel caso di estrazioni senza reimmissione da popolazioni dicotomiche limitate.
Test per evidenziare il condizionamento dei parametri sul risultato sperimentale.**

Enzo D'Arcangelo - Francesco Gori

Premessa

Il lavoro si propone di evidenziare il condizionamento da parte dei parametri della popolazione sul risultato di alcuni test statistici e di fornire a tal proposito strumenti metodologici adeguati per evidenziarlo. Nell'uso dei test parametrici si fa spesso riferimento alla normalità della popolazione in modo non sempre coerente con la natura del problema, ben sapendo che la popolazione-obiettivo, potrebbe avere distribuzione diversa^(*), e ciò soprattutto nel caso di ampiezze campionarie limitate. Inoltre si trascura il fatto che se la popolazione reale da cui provengono i campioni è finita e di piccole dimensioni, ogni "gruppo" estratto diminuisce la numerosità della massa e ne può cambiare la distribuzione. Quindi al succedersi delle estrazioni si modifica la distribuzione campionaria (vedremo in seguito la funzione di distribuzione) e da ciò deriva che campioni indipendenti in questa situazione in pratica non esistono.

Nel lavoro si considerano:

- Popolazioni dicotomiche definite da parametri e di numerosità limitata;
- Piccoli campioni di osservazioni al livello nominale di misurazione;
- Estrazioni senza ripetizione.

Data la difficoltà di affrontare concretamente le effettive condizioni sperimentali al variare dei parametri delle popolazioni, si è cercato di riprodurre i vari modelli attraverso le usuali tecniche di simulazione, allo scopo di studiare le caratteristiche dei test proposti in confronto ai test tradizionali, al variare di tali condizioni.

In particolare sulla base di osservazioni campionarie di natura dicotomica, ad es. del tipo: (-, +), (NO, SI), (O, 1), (Assenza, Presenza), vengono proposte nuove variabili casuali - test e relative distribuzioni nel discreto, sensibili a parametri come π e ρ , e viene evidenziato mediante esempi concreti il ruolo del condizionamento da parte di tali parametri sui risultati probabilistici dei test da noi proposti. In questo lavoro concentriamo la nostra attenzione sul parametro π , **nel prossimo su ambedue i parametri π e ρ .**

E' stata privilegiata l'estrazione senza ripetizione per dare maggior generalità al nostro approccio. I risultati sono stati messi a confronto con quelli ottenuti da test tradizionali quali il chi quadro, test notoriamente meno sensibile alle diverse strutture delle popolazioni.

Introduzione

Nel test dell'analisi delle frequenze in tabelle 2 x k (trattamenti), si confrontano le k frequenze osservate con le frequenze teoriche, o attese, sotto l'ipotesi di indipendenza. La variabile test utilizzata è il χ^2 ([3] Fleiss, pag. 187). In tale approccio, come noto, è opportuno lavorare con frequenze attese non inferiori a 5 per ogni casella.

Il lavoro fa riferimento a popolazioni dicotomiche con ampiezza N limitata e caratterizzate da uno stato di natura π , variabile e fissato dal ricercatore, numerosità campionarie limitate ed estrazioni senza reimmissione - come in realtà nelle indagini correnti (ISTAT) spesso avviene - di k gruppi di soggetti.

^(*) Inoltre, in concreto, non tutte le unità della popolazione (normale) potrebbero essere accessibili.

Prima di entrare nel dettaglio, presentiamo due esempi illustrativi e introduttivi, nel caso di due gruppi, quindi riferiti alla differenza tra due proporzioni ([4] Gori).

Consideriamo due situazioni ‘limite’ di ricerca: una con π prossimo a 0 e l'altra con π prossimo a 1, con $\alpha = .05$, in entrambi i casi.

Per la prima immaginiamo il caso in cui si voglia sperimentare l'efficacia di una strategia di persuasione in un consesso ($N = 400$) ostile all'argomento trattato, con probabilità π dei soggetti favorevoli molto bassa. E' il caso di un ricercatore che, ad esempio, voglia convincere donne appartenenti ad una associazione femminista ad accogliere favorevolmente un'iniziativa di tipo maschilista. In tale ambiente, in cui argomenti di quel tipo sono sempre stati poco graditi, difficilmente le opinioni muteranno in maniera significativa. Selezionati un gruppo di controllo $n_1 = 18$ e uno sperimentale $n_2 = 20$ i cui risultati siano $a_1 = 1$ e $a_2 = 2$; l'ipotesi è unidirezionale sinistra: dopo il trattamento, per avere successo, la proporzione p_2 deve aumentare e si deve avere una differenza sperimentale $dp_s = p_1 - p_2 < 0$. In questa ottica, con i dati proposti risulta $dp_s = -.044$. Ponendo per la massa un π molto piccolo, $.05$, sulla coda di sinistra, il p-value: frequenza cumulata fino a dp_s è $.357 > \alpha$, il “trattamento” non ha avuto successo: H_0 non può essere rigettata.

Oppure, consideriamo lo stesso intervento in ambiente maschilista (o nell'ambiente precedente una iniziativa di tipo femminista). Il trattamento, essendo in armonia con le opinioni del consesso, avrà facilmente successo in quanto gradito, π prossimo a 1. Con le stesse ampiezze campionarie, $a_1 = 10$ (leggera propensione in assenza di trattamento) e $a_2 = 19$ (notevole consenso ai contenuti del trattamento), si ha $dp_s = -.394$. Ponendo $\pi = .95$, in termini di p-value si ottiene $.0000002$: il test è significativo, il “trattamento” ha avuto successo e l'ipotesi nulla H_0 può essere rigettata.

Dati i valori di π , l'analisi statistica conferma un quadro aderente alla realtà. Infatti noti gli stati di natura, costituiti da opinioni così estremizzate, i risultati dei due test statistici coincidono con ciò che è intuitivamente prevedibile: l'indisponibilità o la disponibilità ad accogliere i contenuti dei trattamenti per indurre al cambiamento di opinione. Generalmente lo stato di natura π è ignoto, ma è chiaro il ruolo che esso assume, sia nel determinare i numeri dei successi al “trattamento” con la conseguente differenziazione dei valori delle dp_s ($-.044$ e $.394$), **sia nella forma delle due diverse distribuzioni**. E' questo ultimo il punto su cui si insisterà nel seguito.

L'aspetto rappresentato dallo stato di natura potrebbe essere esteso al confronto fra risultati di uno stesso test applicato su popolazioni diverse. Infatti i risultati potrebbero essere condizionati da situazioni (stati di Natura, parametri, più o meno controllabili) in grado di produrre da soli le differenze. Ad es. si vuole studiare se una iniziativa a favore di “coppie non tradizionali” (di qualsiasi tipo), possa essere accolta o meno in seno ad un certo gruppo etnico, o popolazione.

Al di là del gradimento intrinseco dell'iniziativa, che costituisce l'obiettivo del test, il risultato dipenderà da come l'opinione pubblica sia sensibile al problema ed alle esigenze delle coppie non tradizionali; e ciò potrebbe dipendere da quanto sia diffuso tale fenomeno, in altre parole dalla struttura della popolazione in cui si svolge l'indagine^(*).

Notizie di questo tipo possono orientare il ricercatore; infatti se in una popolazione c'è un forte presenza di coppie non tradizionali, saldamente inserite e accettate, l'esito potrebbe essere favorito e sommarsi alla bontà dell'iniziativa, o viceversa, se le coppie non tradizionali sono una sparuta minoranza poco percepita e quindi poco accettata dalla massa.

I confronti tra risultati ottenuti in diverse popolazioni^(*) avrebbero senso se tali informazioni

^(*) Tale aspetto nell'esempio potrebbe essere valutato mediante un quoziente tra coppie non tradizionali e coppie in totale, o per gruppi di età.

(come ad es. il rapporto tra coppie non tradizionali / totale coppie) non sono molto differenti da una popolazione all'altra.

Nel lavoro si vuole evidenziare il ruolo che svolge il parametro π ed il suo condizionamento sul risultato del test. In altre parole, si vuole far vedere che un risultato significativo (o meno) è causato sia dall'efficacia del trattamento ma anche dallo stato di natura della popolazione.

In tale ottica (riflessioni sullo stato di natura della popolazione), oltre al χ^2 vengono proposte variabili casuali campionarie a k componenti, e confrontati e commentati i risultati dei vari test al variare di π .

1. Considerazioni generali sui test

La logica di un test prevede che data una variabile campionaria (casuale), con distribuzione nota di qualsiasi tipo, in questa viene determinata una o più zone di rifiuto dell'ipotesi nulla di probabilità complessiva α . Dato un valore sperimentale della variabile, se è compreso nella zona di rifiuto, si rifiuta H_0 . Oppure, dato un valore sperimentale, si determina la probabilità sulla coda dal valore stesso in poi: p-value, se non supera α si rifiuta H_0 . Per determinare la zona di rifiuto è sufficiente che la variabile casuale abbia una distribuzione nota trattabile dal punto di vista matematico oppure mediante algoritmi computazionali in grado di sfruttare le enormi potenzialità di calcolo dei moderni computer compresi i pc.

Se, in particolare, consideriamo una combinazione di variabili elementari, sarà necessario (e sufficiente) conoscere le distribuzioni di tali singole componenti per determinare la distribuzione¹⁾ della variabile combinazione, e da questa, dato α , determinare la zona di rifiuto. Naturalmente la variabile combinazione deve essere sensibile e indicativa dell'aspetto che si sta studiando.

2. Riferimenti a lavori precedenti e trattazione attuale

In un precedente lavoro ([4] Gori), partendo dalla considerazione che una proporzione è sostanzialmente una media, era stato considerato il caso di due gruppi²⁾ corrispondenti a due trattamenti, utilizzando la variabile $dp = p_1 - p_2$, combinazione lineare delle proporzioni dei successi (con coefficienti 1 e -1), per confronti ad es. tra effetti di medicinali, regimi alimentari, strategie di persuasione, ecc.

Livello di misurazione nominale.

Per aderire quanto più possibile alle realtà di alcune indagini su popolazioni a due alternative A e B con frequenze π e $1 - \pi$ e di numerosità limitata N, si vuole estendere la procedura della differenza tra proporzioni, al caso di analisi delle proporzioni a k trattamenti (un solo fattore), quindi k gruppi n_j , estratti senza ripetizione e di ampiezze limitate. Per assicurare gli stessi contenuti informativi si consigliano numerosità n_j dello stesso ordine di grandezza. L'elemento sensibile ai trattamenti è la variazione delle proporzioni di risposte corrispondenti alla alternativa A, $p_j = a_j / n_j$ in corrispondenza ai k trattamenti. Aggiungiamo che il numero degli insuccessi $b_j = n_j - a_j$ dà luogo ad altrettante proporzioni $q_j = b_j / n_j$ corrispondenti alla alternativa B, $q_j = 1 - p_j$. Faremo riferimento ([7] Rizzi) alla nota tabella di valori osservati in termini di frequenze e proporzioni (nel j - esimo gruppo, per indicare il numero dei successi a_j e degli insuccessi b_j usiamo rispettivamente n_{j1} e n_{j2}):

Tab. 1

	1° gruppo	j° gruppo	k ° gruppo	Totali
A	$n_{11} = a_1$ p_1	$n_{j1} = a_j$ p_j	$n_{k1} = a_k$ p_k	n_a $p_a = n_a/n$
B	n_{12} q_1	$n_{j2} = n_j - n_{j1}$ q_j	n_{k2} q_k	n_b $p_b = n_b/n$
Totali	n_1 1	n_j 1	n_k 1	n 1

Sotto H_0 , nel caso dell'usuale χ^2 ci si aspetta che le p_j siano uguali tra loro ed a p_a (stimatore di π nella popolazione), pertanto le frequenze attese possono essere stimate da:

$$n_{j1}^* = n_j n_a / n \quad \text{e} \quad n_{j2}^* = n_j n_b / n. \quad (1)$$

Nella trattazione attuale, come nel caso dell'analisi delle medie, si può definire ([8] Soliani):

$$H_0: \pi_1 = \pi_2 = \dots = \pi_k = \pi,$$

se i trattamenti non hanno effetto i campioni provengono dalla stessa popolazione, contro:

$$H_1: \pi_i \neq \pi_j,$$

il trattamento ha effetto almeno per una i e una j .

Dato il precedente sistema di ipotesi, occorre definire lo stato di natura π che ([4] Gori), deve essere valutato dal ricercatore³⁾.

Consideriamo k gruppi di numerosità n_j ed il numero dei successi a_j che assume i valori $0, 1, \dots, n_j$, la p_j che assume valori da 0 a 1, e le k -uple dei valori di p_j che assumono strutture da $0_1, 0_2, \dots, 0_k$ a $1_1, 1_2, \dots, 1_k$, tali strutture sono: $M = (n_1+1) \times (n_2+1) \times \dots \times (n_k+1)$.

Il totale delle osservazioni è $n = \sum_{j=1}^k n_j$.

Per k trattamenti la generica frequenza è il prodotto di k frequenze tra loro condizionate:

$$\begin{aligned} & \text{fr}(p_1) \times \text{fr}(p_2 | p_1) \times \dots \times \text{fr}(p_k | p_1, p_2, \dots, p_{k-1}) = \\ & = \text{fr}(a_1, n_1) \times \text{fr}(a_2, n_2 | a_1, n_1) \times \dots \times \text{fr}(a_k, n_k | a_1, n_1; a_2, n_2; \dots; a_{k-1}, n_{k-1}) = \\ & = \left\{ \binom{N\pi}{a_1} \binom{N(1-\pi)}{n_1 - a_1} \right\} / \binom{N}{n_1} \times \left\{ \binom{N\pi - a_1}{a_2} \binom{N(1-\pi) - n_1 + a_1}{n_2 - a_2} \right\} / \binom{N - n_1}{n_2} \times \dots \quad (2) \\ & \dots \times \left\{ \binom{N\pi - a_1 - \dots - a_{k-1}}{a_k} \binom{N(1-\pi) - n_1 - \dots - n_{k-1} + a_1 + \dots + a_{k-1}}{n_k - a_k} \right\} / \binom{N - n_1 - \dots - n_{k-1}}{n_{k-1}} \end{aligned}$$

e dopo alcuni passaggi si ha:

$$= \left\{ \prod_{j=1}^k \binom{n_j}{a_j} \right\} \times \frac{\binom{N - \sum_{j=1}^k n_j}{N\pi - \sum_{j=1}^k a_j}}{\binom{N}{N\pi}}, \quad (3)$$

L'espressione nella versione (2) mette in evidenza una distribuzione multipla¹⁾ a componenti condizionate. Fissati N , π e le numerosità n_j , la (3) varia con le a_j ($= n_{j1}$ nella Tab 1); ed è immediato osservare che scambiando gli indici il risultato non cambia. La (3) sarà utilizzata nel presente lavoro.

Nel paragrafo seguente sarà affrontato il problema della definizione di una variabile casuale sensibile agli effetti dei trattamenti. Definita tale variabile, per ognuna delle k -uple (M in totale) delle a_j , si ha un valore della variabile stessa e della frequenza (3); raggruppando le frequenze a parità di valore della detta variabile si ottiene la distribuzione utilizzabile per il test.

E' quindi una distribuzione multipla, nel discreto, che andrebbe considerata quando l'assunzione di normalità, come spesso avviene, è forzata, ed ha una notevole importanza perché permette di definire una **classe** di variabili casuali utilizzabili come test, costruite utilizzando le stesse variabili elementari campionarie a_j . Di seguito vengono proposte alcune di tali variabili casuali.

Negli esempi presentati sono indicate le loro caratteristiche in termini di significatività.

3. Variabili casuali di riferimento

Come termine per confronti, considereremo la variabile test χ^2 , come nelle usuali applicazioni, nel continuo, utilizzando la Tab 1 e la (1):

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^2 \frac{(n_{ji} - n_{ji}^*)^2}{n_{ji}^*}, \quad (4)$$

Ricercheremo il p-value, determinato mediante la distribuzione teorica del χ^2 con g.l.= $k-1$, che sarà confrontato con α . L'ipotesi nulla è, $H_0: \pi_1 = \pi_2 = \dots = \pi_k = \pi$: tutti i trattamenti determinano la stessa proporzione (o percentuale) di "successi"

Ci proponiamo di confrontare il risultato nell'applicazione di tale usuale χ^2 , con variabili casuali che utilizzano la (3) nel **discreto**, e che permettono di fare riferimento alla "significatività assoluta o condizionata" ([5] Gori-Cavedon) con stato di natura π variabile ed **equiprobabile**. Per l'ipotesi di nullità abbiamo quindi:

$$H_0: \pi_1 = \pi_2 = \dots = \pi_k = \pi, \text{ per } \pi = .05, .1, .15, \dots, .9, .95.$$

Sotto H_0 , l'uguaglianza tra i k parametri, si può realizzare per qualsiasi valore di π ($0 < \pi < 1$). Verrebbe spontaneo far derivare la variabile dal χ^2 , con frequenze attese ottenute mediante lo stesso parametro π sotto H_0 :

$${}_{\Pi} \chi^2 = \sum_{j=1}^k (p_j - \pi)^2 / \pi, \quad (5)$$

$${}_{\Pi} \chi^2 = \sum_{j=1}^k (n_j p_j - n_j \pi)^2 / n_j \pi, \quad (5 \text{ bis})$$

in quanto, sotto H_0 , i k campioni sono estratti dalla stessa popolazione e gli stessi valori di π utilizzati nella (3) dovrebbero essere applicati alla (5). Tale variabile assume il valore nullo quando le p_j sono uguali al parametro π e tra loro e fin qui andrebbe bene; ma con essa si realizzerebbe la situazione di efficacia dei trattamenti, qualora le differenze $p_j - \pi$ risultassero elevate dando luogo ad un ${}_{\Pi} \chi^2$ molto elevato, anche quando le p_j fossero uguali tra loro, ma diversi da π ; quindi si potrebbero avere valori uguali di ${}_{\Pi} \chi^2$ con risultati sperimentali completamente diversi (perché dovuti o alla diversa efficacia dei trattamenti o alla differenza entro parentesi). Ciò anche in vista della determinazione della generica $f({}_{\Pi} \chi^2)$, che si ottiene sommando tutti i valori della (3) corrispondenti a stessi valori di ${}_{\Pi} \chi^2$, ma indicanti situazioni diverse. Pertanto **la (5) o la (5 bis) non possono essere usate se l'ipotesi da verificare è la differenza delle p_j nei k trattamenti.**

Con i dati della Tab 1 e le (1) useremo ancora l'espressione del χ^2 , ma nel **discreto**, per osservare come nella realtà, se la popolazione è limitata e l'estrazione è con reimmissione, il p-value varia con π :

$${}_d \chi^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^2 \frac{(n_{ji} - n_{ji}^*)^2}{n_{ji}^*} \quad (6)$$

In alternativa, nel **discreto** ed al variare di π , useremo la variabile data dalla somma ponderata delle **differenze assolute**:

$$da = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k |p_i - p_j| \lambda_{ij}, \quad (7)$$

con i $k(k-1)/2$ coefficienti λ_{ij} , fissati dall'operatore qualora abbia motivo di dare maggior peso ad un confronto, in base a sue esigenze di ricerca; per semplicità negli Esercizi che seguiranno sono posti $\lambda_{ij} = 1$. Per tali confronti diretti sarebbe meglio che le ampiezze n_j fossero costanti. da è la variabile nell'universo dei campioni che vale 0 quando tutte le k proporzioni sono uguali. Seguendo la falsariga dell'analisi delle medie, potremmo usare la **combinazione lineare**:

$$combl = \sum_{j=1}^K \lambda_j p_j, \quad \text{con coefficienti tali che: } \sum_{j=1}^K \lambda_j = 0, \quad (8)$$

che deriva dal numeratore della t dell'analisi delle medie⁴⁾.

L'obiettivo è quello di determinare il valore sperimentale della combinazione lineare e in base a questo costruire il prospetto del p-value al variare di $\pi = .05, .1, .15, \dots, .9, .95$.

Ripetendo la procedura già accennata, fissato il numero k dei trattamenti ed effettuato l'esperimento si dispone di k valori di a_j , n_j , quindi di $p_j = a_j/n_j$. Ad esempio, per la variabile (6) si determina il valore sperimentale ${}_d \chi_S^2$, quindi per tutte le k -uple di p_j (M in totale) si può determinare la (6), nell'universo dei campioni. Il p-value si ottiene sommando le (3), relative ai valori di ${}_d \chi^2 \geq {}_d \chi_S^2$ (dato H_0). In termini di probabilità: $P({}_d \chi^2 \geq {}_d \chi_S^2 | H_0) = \text{p-value}$. Analogamente nel caso delle altre variabili. Se il p-value $\leq \alpha$ si rifiuta H_0 .

Se H_0 è vera siamo nella situazione in cui le differenze tra i trattamenti non hanno alcun effetto, oppure siamo nella fase anteriore alla somministrazione dei trattamenti. Nelle due situazioni la distribuzione è casuale, dato π , e, come già detto, si ottiene partendo dalla (2) o (3). Nel caso di test significativo, almeno un trattamento è diversamente efficace dagli altri, siamo in presenza di altra distribuzione⁵⁾, diversa dalla (3).

Come già detto, la trattazione potrebbe essere estesa anche ad altre variabili casuali che utilizzano le a_j e le n_j ⁶⁾.

Gli esempi che seguono utilizzano nell'ordine le variabili: χ^2 , ${}_{\Pi}\chi^2$ nelle espressioni (5) e (5 bis), ${}_d\chi^2$, *da* e *combl*. Cioè partendo dal χ^2 nel continuo, formula (4), verranno confrontati e commentati i risultati in termini di p-value, con quelli ottenuti nel discreto con la (5), la (5 bis), la (6), la (7) e la (8). I casi di significatività saranno evidenziati con il valore di π in neretto.

Sono stati preparati programmi⁷⁾ sulla base della distribuzione data dalla (3) per $k \leq 10$.

I primi tre esempi sono riportati per mostrare i confronti e la esposizione dei risultati, successivamente saranno prese in esame alcune ricerche concrete con commenti sul ruolo di π .

I Esempio, $\alpha = .05$, $K = 3$ trattamenti; $n_j : 7, 6$ e 6 ; $a_j : 1, 3$ e 5 .

Usando la (4) abbiamo una tabella con 2 righe e 3 colonne, interne. Nel continuo, $\chi^2_s = 6.203$, il p-value = 0.0450, il test, con riferimento alla **distribuzione teorica** del χ^2 , risulta **significativo**.

Nel discreto per popolazioni con $N = 400$ e $N\pi = 20, 40, \dots, 380$ al variare di π utilizziamo la distribuzione campionaria ottenuta dalla (3).

Usando la (5) abbiamo il prospetto del p-value al variare di π :

p-value	.000	.000	.000	.001	.004	.012	.026	.059	.091	.110	.088	.046	.022	.010	.002	.000	.000	.000	.000
π	.05	.1	.15	.2	.25	.3	.35	.4	.45	.5	.55	.6	.65	.7	.75	.8	.85	.9	.95

In neretto sono riportati i casi di “significatività condizionata” ([5] Gori-Cavedon).

A parità di $N = 400$, ci proponiamo ora di utilizzare un π più vicino possibile alla media delle p_j ; per la proprietà della media (minimo della somma degli scarti) dovrebbe dar luogo al valore di ${}_{\Pi}\chi^2$ più basso e quindi al p – value più elevato. La media delle p_j è $9/19 = 0.47368$.

Costruiamo una popolazione di ampiezza $N = 400$ e con un π prossimo alla media suddetta.

$400 \times 0.47368 = 189.472$, l'intero (approssimato) più vicino è 189, tale valore è la frequenza assoluta $N\pi$ della popolazione. Per tale popolazione: $N = 400$, $N\pi = 189$, abbiamo un valore effettivo di $\pi = 0.4725$, a questo corrisponde un ${}_{\Pi}\chi^2_s = 0.5071$ che dà luogo ad un p-value = 0.1081; non è un massimo, dipenderà dalle approssimazioni?

Usando la (5 bis) abbiamo, al variare di π :

p-value	.000	.000	.000	.001	.006	.014	.032	.058	.085	.109	.072	.041	.018	.005	.002	.000	.000	.000	.000
π	.05	.1	.15	.2	.25	.3	.35	.4	.45	.5	.55	.6	.65	.7	.75	.8	.85	.9	.95

I risultati sono sostanzialmente simili ai precedenti.

In corrispondenza alla popolazione: $N = 400$, $N\pi = 189$, ottenuta in base alla media vista sopra, si ha:
 $\chi^2_S = 3.2728$ con un p-value = 0.1015.

Usando la (6) (che fa riferimento alla tabella di indipendenza) vediamo che nel discreto, e facendo variare il parametro, abbiamo:

p-value	.002	.010	.019	.028	.036	.043	.050	.055	.059	.060	.059	.055	.050	.043	.036	.028	.019	.010	.002
π	.05	.1	.15	.2	.25	.3	.35	.4	.45	.5	.55	.6	.65	.7	.75	.8	.85	.9	.95

A differenza del precedente caso di uso della (4) che fa riferimento alla distribuzione teorica del χ^2 , il test risulta non significativo per $\pi = .4, .45, .5, .55$ e $.6$.

I valori delle proporzioni sperimentali sono: 0.14286, 0.5000 e 0.8333

Usando la (7), con $\lambda_{ij} = 1$, si ottiene il valore sperimentale, somma delle differenze assolute tra proporzioni $da_s = 1.3810$ (3 confronti) e si ha:

p-value	.000	.000	.000	.004	.010	.017	.025	.032	.036	.038	.036	.031	.024	.016	.009	.004	.001	.000	.000
π	.05	.1	.15	.2	.25	.3	.35	.4	.45	.5	.55	.6	.65	.7	.75	.8	.85	.9	.95

Il test è sempre significativo, è un caso di “significatività assoluta” ([5] Gori-Cavedon).

Usando la (8), posti i valori di $\lambda_j = 1, 1, -2$, la combinazione lineare sperimentale risulta:
 $combl_s = -1.0238$ (coda sinistra), e si ha:

p-value	.000	.000	.003	.006	.010	.013	.017	.020	.021	.021	.020	.017	.013	.008	.004	.002	.000	.000	.000
π	.05	.1	.15	.2	.25	.3	.35	.4	.45	.5	.55	.6	.65	.7	.75	.8	.85	.9	.95

“Significatività assoluta”.

II Esempio, $\alpha = .05$, $K = 4$ trattamenti; $n_j : 5, 6, 6$ e 7 ; $a_j : 3, 4, 3$ e 4 .

Usando la (4), tabella di 2 righe e 4 colonne. $\chi^2_S = 0.35265$, per 3 gdl, il valore della v. c. $\gamma(1.5) = 0.8863$, il p-value risulta 0.9498, test **non significativo**.

Nel discreto, per popolazioni $N = 300$ e $N\pi = 30, 60, \dots, 270$.

Usando la (5)

p-value	.000	.001	.039	.451	.970	.990	.771	.102	.001
π	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9

La media delle p_j è $14/24 = 0.58333$, da cui $300 \times 0.5833 = 175 = N\pi$.

Usando la (5 bis)

p-value	.000	.001	.037	.458	.970	.981	.751	.089	.001
π	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9

Risultati concordanti.

Usando la (6):

p-value	.913	.961	.957	.951	.948	.951	.957	.961	.913
π	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9

E' un caso di "non significatività assoluta" ([5] Gori – Cavedon).

I valori delle proporzioni sperimentali sono: 0.6, 0.6667, 0.5 e 0.5714.

Usando la (7) la somma delle differenze assolute è $da_s = .05286$ (6 confronti). La schermata del p-value al variare di π è:

p-value	.714	.905	.942	.949	.948	.949	.942	.905	.714
π	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9

Il test è assolutamente non significativo.

Applicando la (8), posti i $\lambda_j = 1, 1, -3, 1$, abbiamo la combinazione lineare sperimentale $combl_s = 0.3381$ (coda destra) ed il prospetto:

p-value	.226	.297	.316	.323	.324	.318	.300	.266	.203
π	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9

Test sempre non significativo.

III Esempio, $\alpha = .05$, $K = 3$ trattamenti; numerosità: 5, 6, 5; numero di successi: 2, 1, 4

Applicando la (4), $\chi_s^2 = 4.4868$, v.c. $\gamma(1) = 1$, p-value = 0.10608, **non significativo**.

Nel discreto, per popolazioni: $N = 1000$ e $N\pi = 50, 100, \dots, 950$

Usando la (5)

p-value	.000	.000	.001	.011	.029	.063	.132	.184	.243	.211	.174	.096	.047	.015	.005	.001	.000	.000	.000
π	.05	.1	.15	.2	.25	.3	.35	.4	.45	.5	.55	.6	.65	.7	.75	.8	.85	.9	.95

Usando la (5 bis)

p-value	.000	.000	.002	.013	.035	.074	.139	.200	.228	.238	.152	.073	.035	.014	.004	.001	.000	.000	.000
π	.05	.1	.15	.2	.25	.3	.35	.4	.45	.5	.55	.6	.65	.7	.75	.8	.85	.9	.95

Risultati concordanti.

Applicando la (6), il prospetto del p-value al variare di π è:

p-value	.028	.065	.090	.104	.112	.119	.124	.128	.131	.132	.131	.128	.124	.119	.112	.104	.090	.065	.028
π	.05	.1	.15	.2	.25	.3	.35	.4	.45	.5	.55	.6	.65	.7	.75	.8	.85	.9	.95

Il test è significativo valori estremi di π ; caso di significatività condizionata.

I valori delle proporzioni sperimentali sono: 0.4, 0.1667, 0.8;

Applicando la (7) abbiamo la somma delle differenze assolute è $da_s = .1.2667$ (3 confronti):

p-value	.000	.002	.008	.020	.036	.055	.072	.084	.090	.090	.084	.074	.060	.045	.030	.017	.007	.002	.000
π	.05	.1	.15	.2	.25	.3	.35	.4	.45	.5	.55	.6	.65	.7	.75	.8	.85	.9	.95

Il test è significativo per i valori di π in grassetto.

Applicando la (8), posti i $\lambda_j = 1, -2, 1$, abbiamo la combinazione lineare sperimentale $combl_s = 0.8667$ ed il prospetto:

p-value	.000	.001	.004	.011	.021	.033	.044	.052	.057	.058	.056	.051	.045	.037	.029	.021	.013	.006	.000
π	.05	.1	.15	.2	.25	.3	.35	.4	.45	.5	.55	.6	.65	.7	.75	.8	.85	.9	.95

Il test è significativo per i valori di π in grassetto.

IV Esempio

Da una ricerca trovata su Biometria Principi e Metodi ([9] Salvi - Chiandotto pag. 145) e qui adattata per piccoli gruppi.

Si vogliono confrontare quattro trattamenti con diserbanti totali del suolo, denominati A,B,C,D, al fine di vedere se il loro effetto sia significativamente diverso. A tale scopo prendiamo un appezzamento di terreno apparentemente uniforme, ricoperto da una vegetazione erbacea spontanea e uniforme.

Il piano sperimentale prevede 10 osservazioni per ciascun trattamento; si fraziona l'appezzamento in mille parcelle; si scelgono a caso quattro gruppi di dieci parcelle e ad ogni gruppo si somministra un diverso trattamento. L'eliminazione totale delle erbacce da una parcella è indicata con 0, la resistenza, anche parziale delle medesime, è indicata con 1.

Per i quattro trattamenti abbiamo $n_j : 10, 10, 10, 10$ e $a_j : 3, 4, 6, 3$ "resistenze". $\alpha = .05$.

Usando la (4) si ha: $\chi_s^2 = 2.5$, g.d.l.=3, $\gamma(1.5) = 0.8863$, p-value = 0.4753. **Test non significativo.**

Nel discreto si fa riferimento a popolazioni di $N = 1000$ e $N\pi = 50, 100, \dots, 950$.

Usando la (5)

p-value	.000	.000	.000	.001	.104	.310	.557	.658	.602	.398	.160	.052	.006	.001	.000	.000	.000	.000	.000
π	.05	.1	.15	.2	.25	.3	.35	.4	.45	.5	.55	.6	.65	.7	.75	.8	.85	.9	.95

Usando la (5 bis)

p-value	.000	.000	.001	.011	.105	.307	.554	.678	.638	.453	.158	.054	.006	.001	.000	.000	.000	.000	.000
π	.05	.1	.15	.2	.25	.3	.35	.4	.45	.5	.55	.6	.65	.7	.75	.8	.85	.9	.95

Risultati concordanti.

Applicando la (6) nel discontinuo il prospetto del p-value è:

p-value	.504	.498	.517	.529	.528	.518	.509	.506	.502	.500	.502	.506	.509	.518	.528	.529	.517	.498	.504
π	.05	.1	.15	.2	.25	.3	.35	.4	.45	.5	.55	.6	.65	.7	.75	.8	.85	.9	.95

Test assolutamente non significativo

I valori delle proporzioni sperimentali sono: $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.4$, $p_3 = 0.6$ e $p_4 = 0.3$.

Applicando la (7), la somma differenze assolute sperimentali ottenuta è $da_s = 1$ e si ha:

p-value	.019	.114	.243	.356	.439	.492	.523	.536	.532	.520	.511	.512	.512	.496	.452	.380	.275	.140	.025
π	.05	.1	.15	.2	.25	.3	.35	.4	.45	.5	.55	.6	.65	.7	.75	.8	.85	.9	.95

Il test per $\alpha = .05$ risulta significativo solo per i valori estremi di π ; in sostanza l'ipotesi di uguale efficacia dei diversi erbicidi non può essere rifiutata, a meno che siano stati somministrati in un terreno estremamente scarso di erba o estremamente ricco di erba (stati di Natura opposti). I trattamenti, sono efficaci solo in terreni di tale tipo. Se il ricercatore ritiene di non trovarsi in uno di tali stati di natura (terreni in cui l'erba è estremamente scarsa o estremamente abbondante), non rifiuta l'ipotesi di nullità.

Applicando la (8) e ponendo i valori $\lambda_j : 1, -1, 1, -1$, il valore della combinazione lineare sperimentale è $combl_s = 0.2$, mentre il prospetto del p-value:

p-value	.127	.209	.251	.275	.291	.302	.309	.313	.315	.316	.315	.312	.307	.301	.291	.275	.251	.210	.127
π	.05	.1	.15	.2	.25	.3	.35	.4	.45	.5	.55	.6	.65	.7	.75	.8	.85	.9	.95

Non significatività assoluta.

V Esempio

Il dirigente di un'Azienda che alleva cavalli da corsa decide di sperimentare un nuovo tipo di allenamento; prima di estenderlo alla totalità vuole sperimentarlo. I cavalli in totale sono 400, si scelgono a caso tre gruppi, rispettivamente di 5, 6 e 5 cavalli giovani coetanei e si sottopongono a tre trattamenti A, B, C consistenti in tre dosi diversificate di allenamento. Alla fine del periodo dei trattamenti si hanno i seguenti risultati in termini di miglioramento delle prestazioni: nel gruppo A, 1 miglioramento; nel gruppo B, 3 miglioramenti; nel gruppo C tutti migliorati. Posto $\alpha = .025$.

Usando la (4) si ha: $\chi_s^2 = 6.6540$, p-value = 0.0359, **test non significativo**.

Le proporzioni sono rispettivamente: 0.2, 0.5, 1. Lo stato di natura, numero dei cavalli che nell'Azienda danno luogo a buone prestazioni (con criterio di valutazione del dirigente) è noto, comunque procediamo come se fosse ignorato. Per $N = 400$, fissiamo diversi stati di Natura, di base: $N\pi = 40, 80, \dots, 360$, da cui si ottengono i valori di π .

Usando la (5)

p-value	.000	.000	.004	.016	.073	.055	.018	.002	.000
π	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9

Usando la (5 bis)

p-value	.000	.000	.004	.024	.073	.059	.018	.003	.000
π	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9

Risultati concordanti.

Usando la (6) nel discreto abbiamo il prospetto del p-value, seguente:

p-value	.006	.018	.028	.036	.039	.036	.028	.018	.006
π	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9

Lo stato di natura $\pi = .1$ significa che solo il 10% dei cavalli dell'Azienda (sotto H_0 o prima del trattamento o nel caso di inefficacia), danno buone prestazioni, ecc.

Per $\alpha = .025$ il test risulta condizionato e significativo per stati di Natura in cui la proporzione di cavalli buoni o è scarsa o è elevata.

Usando la (7), la somma delle differenze assolute è $da_s = 1.2$.

p-value	.007	.008	.022	.035	.040	.033	.019	.006	.001
π	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9

Per $\alpha = .025$ il test risulta significativo nei casi di π in neretto, caso di significatività condizionata. In tal caso quel tipo di allenamento sembra avere effetto nei casi in cui lo stato di natura: proporzione π dei 400 cavalli che danno luogo a buone prestazioni, sia basso o alto, mentre se (prima dei trattamenti) la proporzione dei cavalli dell'Azienda, che danno luogo a buone prestazioni, fosse vicino allo 0.50, quel tipo di allenamento non sembra efficace. Sta al dirigente, se conosce la situazione circa le prestazioni (π) dei cavalli dell'Azienda, interpretare i risultati e decidere. Oppure, sapendo per esperienze precedenti che quelle dosi di trattamenti sono efficaci, potrebbe avere qualche informazione sulla natura della popolazione, sul reale valore di π .

Applicando la (8) e considerando che il dirigente dell'Azienda vuole essere molto prudente, ponendo $\lambda_j = -2, 1, 1$, per dare maggior peso (credito) alla proporzione meno elevata (scarso effetto), la combinazione lineare risulta $combl_s = 1.1$

p-value	.000	.002	.010	.017	.020	.019	.015	.009	.003
π	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9

Significatività assoluta.

VI Esempio

Riportiamo un esempio ([8] L. Soliani) adattato per piccoli campioni e popolazione di circa 400 soggetti. Si vuole confrontare l'effetto di 5 pesticidi, dispersi in 5 aree diverse (ma perfettamente analoghe e tali da non influire sugli esiti dei trattamenti) sulla sopravvivenza di una stessa specie animale. $\alpha = .05$.

Tab. 2 Frequenze osservate in 5 gruppi di animali

PESTICIDI						
ANIMALI	A	B	C	D	E	TOTALE
Morti	2	2	4	3	2	13
Sopravvissuti	3	1	5	5	3	17
TOTALE	5	3	9	8	5	30

Esiste una differenza significativa tra le percentuali (o le proporzioni) di animali morti con i vari Pesticidi sperimentati

Tab. 3 Frequenze teoriche sotto Ho

PESTICIDI						
ANIMALI	A	B	C	D	E	TOTALE
<i>Morti</i>	2.17	1.30	3.90	3.47	2.17	13
<i>Sopravvissuti</i>	2.83	1.70	5.10	4.53	2.83	17
TOTALE	5	3	9	8	5	30

In molte caselle le frequenze attese sono molto basse.

Nel continuo applicando la (4) il $\chi^2_s = 0.8258$, che dà luogo ad un p-value = 0.9349. Il test **non** risulta significativo, i trattamenti non si diversificano in maniera significativa.

Ma morte o sopravvivenza di quegli animali dipendono dalle caratteristiche di “resistenza” della specie e in quell’ambiente, quindi più in generale, dallo stato di Natura π : generica probabilità di morte per sostanze nocive nella specie stessa.

Nel discreto consideriamo un ventaglio di stati di natura, π , possibili differenti caratteristiche di “resistenza” della specie. $N = 400$, $N\pi = 40, 80, \dots, 360$.

Usando la (5)

p-value	.000	.009	.098	.65	.927	.904	.514	.034	.001
π	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9

Usando la (5 bis)

p-value	.000	.044	.658	.981	.959	.543	.402	.000	.000
π	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9

Risultati concordanti.

Applicando la (6):

p-value	.960	.968	.943	.949	.956	.949	.943	.968	.960
π	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9

Per $\alpha = .05$ il test non risulta significativo. Si può comunque notare che in popolazioni in cui la ‘resistenza a sostanze nocive’ sia molto alta (probabilità di morte nella specie .1 e .2) o molto bassa (probabilità di morte nella specie .8 e .9) i trattamenti (cinque pesticidi) non si differenziano, hanno più o meno lo stesso effetto. Se il ricercatore conosce la situazione sa come regolarsi.

Le proporzioni risultano: 0.6, 0.333, 0.555, 0.625, 0.6

Con la (7), $da_s = 1.2556$

p-value	.531	.848	.895	.925	.946	.925	.895	.848	.532
π	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9

Il test non è mai significativo anche se i p-value sono più differenziati.

Applicando la (8) e con valori di $\lambda_j = -1.5, -1, 2, 2, 0.6$, per valorizzare i trattamenti C e D più numerosi; abbiamo una combinazione lineare $combl_s = 0.8278$ ed un prospetto:

p-value	.030	.108	.185	.252	.309	.362	.414	.480	.564
π	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9

Significativo solo per la più bassa probabilità di morte.

VII Esempio

Si vuole provare l'effetto di tre sussidi didattici (A: appunti presi alle lezioni, B: testo di esercizi, C: testo senza esercizi) per la preparazione agli esami di matematica. Scelti opportunamente tre gruppi di 4 studenti da una classe di 96, si ottengono i risultati seguenti in termini di promozioni o bocciature:

Tab. 4 Frequenze osservate

SUSSIDI				
STUDENTI	A	B	C	TOT.
<i>Promossi</i>	4	2	3	9
<i>Bocciati</i>	0	2	1	3
TOTALE	4	4	4	12

Tab. 5 Frequenze teoriche sotto Ho

SUSSIDI				
STUDENTI	A	B	C	TOT.
<i>Promossi</i>	3	3	3	9
<i>Bocciati</i>	1	1	1	3
TOTALE	4	4	4	12

Notiamo che le frequenze attese sono tutte inferiori a 5.

Per $\alpha = .05$.

Applicando la (4), $\chi_s^2 = 2.667$ con p-value = 0.2636; i tre trattamenti **non differiscono significativamente**.

Nel discreto, per $N = 96$ ed $N\pi = 12$ (=96 x .125) iniziale: gli studenti bravi nella classe sono molto scarsi,

Usando la (5)

p-value	.000	.008	.035	.260	.235	.039	.002
π	.125	.25	.375	.5	.625	.75	.875

Usando la (5 bis)

p-value	.000	.000	.015	.260	.647	.629	.212
π	.125	.25	.375	.5	.625	.75	.875

Con la (6), abbiamo:

p-value	.189	.400	.417	.388	.417	.400	.189
π	.125	.250	.375	.500	.625	.750	.875

I risultati, non significativi, dipendono comunque dalla situazione di capacità specifica della classe.

Le proporzioni di promossi risultano: 0, 0.5, 0.75.

Con la (7) $da_s = 1$ e abbiamo:

p-value	.189	.421	.514	.539	.514	.421	.189
π	.125	.250	.375	.500	.625	.750	.850

Anche in questo caso i risultati, tutti non significativi, dipendono dalla variabile utilizzata e dalla situazione culturale specifica della classe.

Applicando la (8) e ponendo i $\lambda_j : -2, 1, 1$, abbiamo la combinazione lineare sperimentale $combl_s = -0.75$ ed il prospetto:

p-value	.061	.125	.151	.159	.150	.117	.038
π	.125	.250	.375	.500	.625	.750	.850

I trattamenti sembrano diversificarsi, hanno diversa efficacia, se la classe è composta da una elevata proporzione di studenti bravi, caratteristica che dovrebbe essere nota all'insegnante.

VIII Esempio. $K = 5$. $\alpha = 0.025$.

Tab. 6, A*B, Frequenze osservate

A	B					TOT.
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	3	5	6	8	1	23
A2	7	5	4	2	9	27
TOTALE	10	10	10	10	10	50

Tab. 7, A*B, Frequenze teoriche sotto Ho

A	B					TOT.
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	4.6	4.6	4.6	4.6	4.6	23
A2	5.4	5.4	5.4	5.4	5.4	27
TOTALE	10	10	10	10	10	50

Nel continuo, usando la (4), $\chi_s^2 = 11.755$, $gl = 4$, $\gamma(2) = 1$, p-value = 0.01927 **significativo**.

Nel discreto, consideriamo popolazioni di $N = 1000$ e $N\pi = 50, 100, \dots, 950$.

Usando la (5) abbiamo:

p-value	.000	.000	.000	.000	.000	.001	.006	.017	.028	.027	.013	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
π	.05	.1	.15	.2	.25	.3	.35	.4	.45	.5	.55	.6	.65	.7	.75	.8	.85	.9	.95

Usando la (5 bis):

p-value	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.007	.020	.032	.031	.012	.004	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000
π	.05	.1	.15	.2	.25	.3	.35	.4	.45	.5	.55	.6	.65	.7	.75	.8	.85	.9	.95

In ambedue i casi, per popolazioni finite e sostanzialmente bilanciate il risultato non è significativo.

Usando la (6):

p-value	.009	.015	.015	.015	.015	.016	.017	.018	.018	.019	.018	.018	.017	.016	.015	.015	.015	.015	.009
π	.05	.1	.15	.2	.25	.3	.35	.4	.45	.5	.55	.6	.65	.7	.75	.8	.85	.9	.95

“Significatività assoluta”.

Usando la (7) abbiamo: $da_s = 3.4$

p-value	.000	.000	.000	.001	.002	.004	.007	.010	.012	.013	.012	.010	.008	.005	.002	.001	.000	.000	.000
π	.05	.1	.15	.2	.25	.3	.35	.4	.45	.5	.55	.6	.65	.7	.75	.8	.85	.9	.95

Usando la (8) e ponendo $\lambda_j : -1 \ -1 \ 2 \ 1 \ -1$ abbiamo $combl_s = 1.1$ e:

p-value	.000	.000	.001	.002	.004	.006	.007	.008	.009	.009	.008	.007	.006	.004	.002	.001	.000	.000	.000
π	.05	.1	.15	.2	.25	.3	.35	.4	.45	.5	.55	.6	.65	.7	.75	.8	.85	.9	.95

NOTE

¹⁾ Nell’analisi delle medie, per popolazioni normali, esisteva il problema ([1] Dunnett, [2], De Carolis, [6] Pompilj) circa l’uso non corretto della t di Student semplice e risolto con la t multipla. La (3) può essere vista come la risoluzione dello stesso problema nel caso di popolazione dicotomica, per k campioni non indipendenti ed estrazioni senza reimmissione.

2) Per $K=2$ la distribuzione è caratterizzata da:

$$E(p_1 - p_2) = 0,$$

$$\text{var}(p_1 - p_2) = N \pi (1 - \pi) (1/n_1 + 1/n_2) / (N - 1),$$

$$\text{cov}(p_1, p_2) = -N \pi (1 - \pi) / (N-1).$$

3) In altri termini un identico disegno di analisi delle medie (o della varianza) effettuato in diversi contesti sperimentali, ad es. Toronto e Nairobi, porta agli stessi risultati? E sarebbe prudente estenderli da una località all'altra?

4) Escludendo il denominatore:

$$\left[\left(\frac{\lambda_1^2}{n_1} + \dots + \frac{\lambda_k^2}{n_k} \right) \frac{(n_1 - 1)p_1 + \dots + (n_k - 1)p_k}{n_1 + \dots + n_k - k} \left(1 - \frac{(n_1 - 1)p_1 + \dots + (n_k - 1)p_k}{n_1 + \dots + n_k - k} \right) \right]^{0.5}.$$

5) Per l'eventuale calcolo della potenza si dovranno definire i valori di π .

6) Posto $p = \sum a_j / \sum n_j$, un'altra variabile casuale potrebbe essere la devianza tra le p_j :

$$dp_j = \sum_{j=1}^K (p_j - p)^2 n_j.$$

Oppure la devianza dei numeri dei successi a_j :

$$da_j = \sum_{j=1}^K (a_j - \sum a_i / k)^2 n_j$$

Qualora come variabile casuale si volesse usare la differenza sperimentale più elevata in valore assoluto tra le $k(k-1)/2$, determinati i due trattamenti, si tratterebbe di controllare se nella distribuzione campionaria delle differenze tra i risultati dei due trattamenti, quel risultato sperimentale fosse significativo o meno. Ma si rientrerebbe nel caso di due gruppi.

7) Programmi disponibili gratuitamente a richiesta. Per motivi di tempo si consiglia di lavorare con $k < 7$ e $n < 30$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] C. W. Dunnett and M. Sobel, , A bivariate generalization of Student-distribution, with tables for certain special case, Cornell University, 1951.
- [2] L. V..De Carolis, Osservazioni sopra l'analisi delle medie nel caso di più confronti. Statistica, n.3, Anno XXV, pp. 478-497, 1965.
- [3] Joseph L. Fleiss, Bruce Levin and Myunghee Cho Paik, Statistical methods for rates and proportions (3rd edn). Wiley, New Jersey, 2003.
- [4] F. Gori, 2012, Il test della differenza tra proporzioni per piccoli campioni. Critiche all'approssimazione mediante la normale, significatività condizionata, considerazioni sulla logica inferenziale e sulla rappresentatività campionaria. A. D .S .S. C. C., Università di Bari, 2011.
- [5] F. Gori, G. Cavedon, La significatività assoluta e condizionata, considerazioni sulla logica inferenziale e sulla rappresentatività campionaria, nel test sulla differenza tra proporzioni per piccoli campioni, Dipartimento di Scienze Statistiche, La Sapienza Università di Roma, 2012.
- [6] G. Pompilj, Teoria dei Campioni, Veschi, Roma, 1959.
- [7] A. Rizzi, Inferenza statistica, Utet, Torino, 1992.
- [8] L. Soliani , Manuale di Statistica per la ricerca e la professione statistica univariata e bivariata parametrica e non parametrica per le discipline ambientali e biologiche, Edizione Aprile, 2005.
- [9] L. Salvi, B. Chiandotto, Biometria: principi e metodi, Piccin, Padova, 1978.