Valutazione del rischio di mercato di prodotti tradizionali in gestione separata in base al nuovo regime informativo per i PRIIPs

Marco Aleandri

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"

Dottorato di Ricerca in Scienze Attuariali

Abstract

A seguito dell'entrata in vigore del Regolamento UE che impone agli intermediari finanziari (ivi incluse le compagnie assicurative) una nuova e più complessa informativa al cliente retail in riferimento ai PRIIPs, diventa necessario definire modelli stocastici che simulino la performance di tali prodotti. Dopo una breve introduzione al problema, con la descrizione dei punti fondamentali nella nuova normativa, il paper presenta un possibile approccio, conforme ad essa, per la valutazione del rischio di mercato di un prodotto tradizionale in gestione separata.

Keywords: PRIIP, KID, gestione separata, rischio di mercato, valutazione *real world*, modello gaussiano a due fattori, Black-Scholes, rivalutazione stocastica

1. Introduzione

A partire dal 31 dicembre 2016 entrerà in vigore il Regolamento UE [4] relativo ai documenti contenenti le informazioni chiave per i PRIIPs. Il Regolamento fa parte di un più ampio pacchetto legislativo dedicato a ricostruire la fiducia dei consumatori nei mercati finanziari, a cui sono riconducibili anche le direttive IDD e MIFID II. PRIIPs è l'acronimo di *Packaged Retail Investment and Insurance-based investments Products*, ossia tutti quei prodotti destinati a clienti privati e il cui valore è soggetto a fluttuazioni dovute all'esposizione a variabili di mercato o al rendimento di una o più attività sottostanti. Sono caratterizzati da un processo di assemblaggio finalizzato

alla creazione di prodotti che abbiano esposizioni, caratteristiche o strutture dei costi diverse rispetto ad una detenzione diretta. Quindi possiamo definire PRIIPs sia i prodotti finanziari complessi (fondi comuni di investimento, obbligazioni convertibili, derivati, ecc.) che i prodotti assicurativi con una o più componenti di investimento. Oggetto di questo paper saranno proprio quest'ultimi, che comprendono i prodotti di ramo primo (prodotti tradizionali collegati a una gestione separata) e i prodotti di ramo terzo (unit-linked e index-linked).
Come specificato nel paragrafo 1 della sezione *Explanatory Memorandum* in [4], a partire dal 1 gennaio 2017 le compagnie assicurative sono tenute a predisporre un *Key Information Document* (KID) specifico per ogni PRIIP, da mettere a disposizione dei potenziali clienti retail prima che il prodotto venga effettivamente sottoscritto. Con qualche semplificazione, potremmo pensare al KID come ad una nota informativa in stile Solvency II, con valutazioni market consistent orientate al rischio. Tuttavia, essendo un documento destinato ai clienti, sintesi e trasparenza sono ancor più rilevanti.
Il KID si focalizza su alcune caratteristiche del prodotto, le più delicate dal punto di vista del cliente:

1. valutazione del rischio di mercato, del rischio di credito e del rischio di liquidità (appendice II-III in [5])
2. stima della performance su (almeno) tre scenari di sensitivity: sfavorevole, moderato, favorevole (appendice IV-V in [5])
3. presentazione di costi e spese di gestione (appendice VI-VII in [5]).

Nel paper vengono approfondite le valutazioni al punto 1, finalizzate all'assegnazione di una classe di rischio al prodotto in questione, detta *classe MRM* (acronimo di *market risk measure*), ovvero un punteggio da 1 a 7 in funzione della volatilità della performance. In tal modo il cliente può facilmente comparare la rischiosità di prodotti differenti partendo dalla stessa base metodologica.

2. PRIIPs e Solvency 2

In riferimento alla valutazione del rischio di mercato di un PRIIP, riportiamo il paragrafo 1 dell'appendice II in [5]:

> *Market risk is measured by the annualised volatility corresponding to the value-at-risk (VaR) at a confidence level of 97.5% over the*

> *recommended holding period, unless stated otherwise. The VaR is the percentage of the amount invested, that is returned to the retail investor.*

Il paragrafo 4 dell'appendice II in [5] definisce quattro categorie di PRIIP, ad ognuna delle quali corrisponde una metodologia differente per la valutazione del rischio di mercato consistente con la definizione appena citata:

1. PRIIPs nei quali gli investitori possono perdere più di quanto investito (ad esempio, prodotti derivati di sottostanti poco liquidi o poco trasparenti)
2. PRIIPs collegati linearmente a prestazioni di strumenti finanziari sottostanti (ad esempio, unit-linked senza garanzie)
3. PRIIPs collegati non linearmente a prestazioni di strumenti finanziari sottostanti (ad esempio, prodotti strutturati)
4. PRIIPs il cui valore dipende, in parte, da fattori non osservabili sul mercato (ad esempio, prodotti assicurativi con partecipazione agli utili variabile a discrezione della compagnia assicurativa).

Ai PRIIPs della categoria 1, sostanzialmente i più rischiosi, viene assegnata la classe MRM 6 o 7 solo in base alle caratteristiche di trasparenza e rischiosità degli strumenti finanziari sottostanti il prodotto, senza particolari valuazioni quantitative. Per quanto riguarda i PRIIPs della categoria 2, si fa riferimento alla distribuzione storica dei rendimenti, la cui volatilità corrisponde ad una certa classe MRM da 1 a 7. Più complessa è la valutazione del rischio di mercato dei PRIIPs nella categoria 3, dato che il Regolamento [4] e, in modo più specifico, i paragrafi 16-24 dell'appendice II in [5] richiedono essenzialmente l'utilizzo di un approccio *market-to-model*:

> *The VaR in price space shall be calculated from a distribution of PRIIP values at the end of the recommended holding period. The distribution shall be obtained by simulating the price or prices, which determine the value of the PRIIP, at the end of the recommended holding period. The VaR shall be the value of the PRIIP at a confidence level of 97.5% at the end of the recommended holding period discounted to the present date using the expected risk-free discount factor from the present date to the end of the recommended holding period.*

Calcolato il VaR, l'appendice II in [5] indica la seguente formula per il calcolo della volatilità, ovvero della *VaR-equivalent volatility* (VEV), della performance del PRIIP:

$$VEV(T) := \frac{\sqrt{3.842 - 2\ln[VaR_{97.5\%}(T)]} - 1.96}{\sqrt{T}} \tag{1}$$

da cui l'assegnazione della classe MRM (la stessa formula viene utilizzata anche per i PRIIPs della categoria 2, ma il VaR viene approssimato su base storica) in base alla tabella riportata al paragrafo 2 dell'appendice II in [5]:

classe MRM	VEV		
1	0%	-	0.5%
2	0.5%	-	5%
3	5%	-	12%
4	12%	-	20%
5	20%	-	30%
6	30%	-	80%
7	80%	-	∞

In realtà è facile provare che la (1) risulta dall'ipotesi che, posto $G_0 = 1$, il processo stocastico G_T della rivalutazione collegata alla gestione separata alla scadenza T del PRIIP è un moto browniano geometrico a media nulla. In tal caso, infatti, $\ln(G_T)$ ha distribuzione normale di media $-\frac{\sigma^2 t}{2}$ e varianza $\sigma^2 t$. Pertanto

$$\ln[VaR_{97.5\%}(T)] = -\frac{\sigma^2 T}{2} - z_{97.5\%}\sqrt{\sigma^2 T} \approx -\frac{\sigma^2 T}{2} - 1.96\sigma\sqrt{T} \tag{2}$$

e σ si ottiene dalla seguente equazione di secondo grado:

$$\frac{\sigma^2 T}{2} + 1.96\sigma\sqrt{T} + \ln[VaR_{97.5\%}(T)] = 0 \tag{3}$$

le cui soluzioni sono

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{-1.96\sqrt{T} \pm \sqrt{1.96^2 T - 2T\ln[VaR_{97.5\%}(T)]}}{T} = \\ &\approx \frac{-1.96 \pm \sqrt{3.842 - 2\ln[VaR_{97.5\%}(T)]}}{\sqrt{T}} \qquad (4)\end{aligned}$$

che, presa col segno positivo, equivale alla (1).
Un PRIIP di categoria 4 è ancora più complesso da valutare, poiché ogni singola componente di rendimento deve essere identificata e assegnata ad una delle tre categorie precedenti, in modo da calcolarne le volatilità stand-alone e quindi riaggregarle tenendo in considerazione eventuali diversificazioni.
Dunque il problema di classificare la rischiosità di un PRIIP in categoria 2, 3 o 4 si riduce al problema di definirne la distribuzione delle performance e calcolarne la volatilità mediante la (1). Il primo passo da compiere, però, è assegnare la categoria opportuna ad un prodotto assicurativo in gestione separata. Poiché il paragrafo 7 dell'appendice II in [5] specifica che

> *Category 4 covers PRIIPs whose values depend in part on factors not observed in the market, including insurance-based PRIIPs which distribute a portion of the PRIIP manufacturers profits to retail investors*

pare evidente che il tipico prodotto tradizionale in gestione separata con minimo garantito e partecipazione agli utili vada assegnato alla categoria 4. In realtà osserviamo che la percentuale di partecipazione agli utili dell'assicurato, così come qualunque altro parametro che possa influenzarla, sono prefissati nel contratto e non dipendono dal risultato economico della compagnia. Quindi, pur non essendo parametri osservabili sul mercato, restano comunque noti e costanti nel tempo. Di fatto, l'unica variable aleatoria resta la performance della gestione separata. Successivamente il paragrafo 26 dell'appendice II in [5], riferendosi ad un generico PRIIP in categoria 4, ci dice che

> *The different components of the PRIIP that contribute to the performance of the PRIIP shall be identified, in order for those components that are not wholly or partly dependent on a factor or factors that are unobserved in the market to be treated according to the relevant methods set out in this Annex for Category 1, 2 or 3 PRIIPs. For each of these components a VEV shall be calculated.*

Poiché, come detto, nessun parametro può essere modificato a discrezione della compagnia durante la vita della polizza, il prodotto tradizionale in gestione separata possiede una sola componente che, in particolare, va assegnata alla categoria 3: infatti le relative performance sono funzioni non lineari delle performance degli attivi a copertura a causa della presenza del minimo garantito (o comunque di qualunque altra garanzia). Di conseguenza, pur riconoscendo che il prodotto assicurativo tradizionale vada assegnato alla categoria 4, nel seguito faremo esclusivamente riferimento alla metodologia che [5] delinea per la categoria 3.

L'approccio teorico è riconducibile a Solvency 2, pur con due fondamentali differenze. Innanzitutto la valutazione è, per sua natura, *real world*, dato che il cliente retail deve farsi un'idea realistica di ciò che sta acquistando. Viceversa, i tipici modelli interni utilizzati per Solvency 2 si basano su proiezioni ALM *risk neutral*, ancorché market consistent. In secondo luogo, il Regolamento [4] presuppone l'applicazione di una particolare metodologia, qualunque essa sia, che tenga conto delle specificità di ogni singolo PRIIP, mentre un modello interno Solvency 2 tende piuttosto alla semplificazione e all'aggregazione di prodotti simili, in modo da rendere più agili (e talvolta meno volatili) le valutazioni a livello di portafoglio.

Pertanto, se da un lato qualunque valutazione basata su scenari deterministici predefiniti (ad esempio, il rendimento prevedibile) non è ammessa dal Regolamento [4], dall'altro fare leva sulle metodologie Solvency 2, pur non essendo impossibile, di sicuro non è agevole: con ogni probabilità implica notevoli modifiche *ad hoc* e, di fronte a prodotti particolarmente complessi, potrebbe risultare inapplicabile. Ad esempio, se si considera la simulazione degli attivi di una gestione separata in un tipico modello ALM per valutazioni Solvency 2, ogni singolo titolo viene valutato e simulato in modo che la performance converga al tasso risk-free, appunto, in un mercato *risk neutral*. Questo significa che la componente azionaria della gestione rende il tasso risk-free, che i cash-flow obbligazionari vengono aggiustati per il rischio, che le opzioni implicite di obbligazioni putable vengono simulate sulla base di uno scenario risk-neutral, e quant'altro. Allo stesso tempo il PRIIP deve essere valutato solo in base alla peformance a cui il singolo assicurato avrebbe diritto a scadenza, indipendentemente da qualunque altra causa di uscita, ma in un classico modello ALM si tiene conto anche della mortalità, dei riscatti e delle rescissioni. In una situazione di questo tipo, peraltro piuttosto comune, non è affatto banale il passaggio da una valutazione *risk neutral* di portafoglio a una valutazione *real world* sulla singola polizza.

Nelle sezioni che seguono viene proposta una metodologia *real world* facilmente implementabile e che non richiede un modello ALM. Lo scopo è simulare il rendimento di una gestione separata e, di conseguenza, il tasso di rivalutazione applicato ad un PRIIP in funzione delle performance annuali degli attivi a copertura. La gestione separata è caratterizzata da una componente obbligazionaria e da una componente azionaria, e il tasso di rivalutazione risulterà dalla loro aggregazione.

3. Dinamica di mercato

Il paragrafo 23 dell'appendice 2 in [5] richiede esplicitamente l'individuazione delle componenti principali della curva dei tassi, affermando che

> *For curves, a principal component analysis (PCA) shall be performed to ensure that the simulation of the movements of each point on the curve over a long period results in a consistent curve*

il che impedisce l'utilizzo di qualunque modello stocastico a un fattore (CIR, Vasicek, ecc.) per la simulazione del tasso risk-free (come ad esempio in [2] e [3]) e quindi del tasso di rendimento obbligazionario. Infatti diversi autori hanno dimostrato mediante varie applicazioni che solo un modello stocastico a più fattori garantisce la spiegazione di sufficiente variabilità nella curva dei tassi. Ad esempio un'applicazione in [8] al mercato britannico mostra che la prima componente spiega il 92% dell'informazione, mentre con la seconda si supera il 99%. Nell'applicazione in [6] solo tre componenti riescono a spiegare più del 90% dell'informazione, ma la prima componente spiega meno dell'80%.

Inoltre, dato che il tasso di rivalutazione potrebbe dipendere dai rendimenti del fondo negli ultimi N anni (invece che dalla sola performance dell'anno precedente), è necessario tenere in considerazione le correlazioni tra i rendimenti obbligazionari a varie scadenze. Come evidenziato in [1], i tradizionali modelli stocastici a un fattore implicano una correlazione pari a 1 tra tassi di scadenze differenti, ovvero ogni simulazione induce uno spostamento sostanzialmente rigido della curva.

Un altro problema ben noto dei modelli ad un fattore è l'addattamento solo approssimativo alla curva dei tassi attuale, mentre un addattamento esatto sarebbe preferibile, ad esempio mediante l'utilizzo di un ulteriore fattore deterministico.

Per queste ragioni e sulla falsa riga di quanto proposto in [7], scegliamo una dinamica gaussiana a due fattori stocastici con l'aggiunta di un terzo fattore di adattamento deterministico, così come descritta in [1]:

$$i_t := X_t + Y_t + \phi(t) \tag{5}$$

in cui

$$dX_t = -\mu_x X_t dt + \sigma_x dZ_t^x \tag{6}$$
$$dY_t = -\mu_y Y_t dt + \sigma_y dZ_t^y \tag{7}$$

imponendo le condizioni iniziali $X_0 = 0$ e $Y_0 = 0$. La correlazione lineare istantanea dei due processi è rappresentata dalla costante ρ:

$$dZ_t^x dZ_t^y = \rho dt. \tag{8}$$

Si osservi che, per effetto della (8), il processo stocastico descritto da (6) e (7) può essere riscritto come segue:

$$dX_t = -\mu_x X_t dt + \sigma_x dZ_t^x \tag{9}$$
$$dY_t = -\mu_y Y_t dt + \sigma_y \Big(\rho dZ_t^x + \sqrt{1-\rho^2} dZ_t^y\Big) \tag{10}$$

ove stavolta dZ_t^x e dZ_t^y sono indipendenti.
Supponendo che la curva dei prezzi ZCB attuale sia interpolata da un qualche polinomio $\Pi(T)$, si dimostra (cfr. [1]) che, se $f(T)$ denota il tasso istantaneo in T, ovvero

$$f(T) := -\frac{d \ln \Pi(T)}{dT} \tag{11}$$

allora la funzione deterministica $\phi(T)$ definita da

$$\begin{aligned} \phi(T) \ &:= \ f(T) + \frac{\sigma_x^2}{2\mu_x^2}(1 - e^{-\mu_x T})^2 + \frac{\sigma_y^2}{2\mu_y^2}(1 - e^{-\mu_y T})^2 + \\ &+ \ \frac{\rho\sigma_x\sigma_y}{\mu_x\mu_y}(1 - e^{-\mu_x T})(1 - e^{-\mu_y T}) \end{aligned} \tag{12}$$

garantisce un adattamento esatto del modello alla curva attuale dei tassi di interesse. In effetti è stato introdotto un certo grado di approssimazione, dato che il metodo di interpolazione utilizzato per calcolare il polinomio Π influenza i risultati. In ogni caso l'adattamento a tale polinomio è perfetto.
Il vantaggio di scegliere il modello gaussiano piuttosto che qualunque altro modello stocastico a due fattori risiede nel fatto che tale dinamica consente la risoluzione esplicita del sistema di equazioni differenziali descritto da (6) e (7). Quindi è caratterizzato dalla stessa trattabilità analitica di un modello di Vasicek o un modello CIR, nonostante la maggior complessità dovuta alla

presenza di due fattori correlati. Infatti, come dimostato in [1], la distribuzione di r_t condizionata a x_s e y_s, con $s < t$, è una normale con media e varianza condizionate rispettivamente pari a

$$\begin{aligned} E_s[r_t] &= x_s e^{-\mu_x(t-s)} + y_s e^{-\mu_y(t-s)} + \phi(t) \quad (13) \\ Var_s(r_t) &= \frac{\sigma_x^2}{2\mu_x}\Big[1 - e^{-2\mu_x(t-s)}\Big] + \frac{\sigma_y^2}{2\mu_y}\Big[1 - e^{-2\mu_y(t-s)}\Big] \\ &+ \frac{2\rho\sigma_x\sigma_y}{\mu_x+\mu_y}\Big[1 - e^{-(\mu_x+\mu_y)(t-s)}\Big]. \quad (14) \end{aligned}$$

Nonostante la distribuzione normale assegni una probabilità positiva a tassi negativi, è un limite che possiamo accettare considerando che molti strumenti obbligazionari attualmente presenti sul mercato garantiscono, appunto, rendimenti negativi in corrispondenza di scadenze brevi. In [1] viene anche dimostrato che il prezzo di un bond al tempo t con scadenza $T > t$ in base al modello gaussiano a due fattori è pari a

$$P(t,T) = e^{-\int_t^T \phi(\tau)d\tau - \frac{1-e^{-\mu_x(T-t)}}{\mu_x}X_t - \frac{1-e^{-\mu_y(T-t)}}{\mu_y}Y_t + V(t,T)} \quad (15)$$

ove

$$V(t,T) = V_x(t,T) + V_y(t,T) + V_{xy}(t,T) \quad (16)$$

$$V_x(t,T) := \frac{\sigma_x^2}{2\mu_x^2}\left[T - t + \frac{2e^{-\mu_x(T-t)}}{\mu_x} - \frac{e^{-2\mu_x(T-t)}}{2\mu_x} - \frac{3}{2\mu_x}\right] \quad (17)$$

$$V_y(t,T) := \frac{\sigma_y^2}{2\mu_y^2}\left[T - t + \frac{2e^{-\mu_y(T-t)}}{\mu_y} - \frac{e^{-2\mu_y(T-t)}}{2\mu_y} - \frac{3}{2\mu_y}\right] \quad (18)$$

$$V_{xy}(t,T) := \frac{\rho\sigma_x\sigma_y}{\mu_x\mu_y}\left[T-t+\frac{e^{-\mu_x(T-t)}-1}{\mu_x}+\frac{e^{-\mu_y(T-t)}-1}{\mu_y}-\frac{e^{-(\mu_x+\mu_y)(T-t)}-1}{\mu_x+\mu_y}\right]. \quad (19)$$

Dato che la simulazione degli scenari deve avvenire in un contesto *real world*, ossia che tenga conto del rischio di credito delle obbligazioni in gestione separata, aggiustiamo la funzione $\phi(t)$ come segue:

$$\begin{aligned} \phi^*(T) &:= f(T) + \left(\frac{\sigma_x^2}{2\mu_x^2} + d_x\right)(1 - e^{-\mu_x T})^2 + \left(\frac{\sigma_y^2}{2\mu_y^2} + d_y\right)(1 - e^{-\mu_y T})^2 + \\ &+ \frac{\rho\sigma_x\sigma_y}{\mu_x\mu_y}(1 - e^{-\mu_x T})(1 - e^{-\mu_y T}) \quad (20) \end{aligned}$$

che equivale ad aggiustare i processi stocastici X_t e Y_t mediante un premio al rischio a due fattori variabili nel tempo in modo deterministico e che tendono alle due costanti d_x e d_y:

$$X_t^* := X_t + d_x(1 - e^{-\mu_x t})^2 \tag{21}$$
$$Y_t^* := Y_t + d_y(1 - e^{-\mu_y t})^2. \tag{22}$$

Di conseguenza il tasso di rendimento obbligazionario a breve è pari a

$$r_t := i_t + d_x(1 - e^{-\mu_x t})^2 + d_y(1 - e^{-\mu_y t})^2. \tag{23}$$

La componente azionaria della gestione separata viene simulata mediante un moto browniano geometrico modificato che separa la componente funzione del tasso di interesse r_t dalla componente che include il premio al rischio μ_S:

$$S_t = S_0 e^{\int_0^t r_\tau d\tau + \left(\mu_S - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)t + \sigma_S Z_t^S} \tag{24}$$

in cui Z_t^S è indipendente da Z_t^x e Z_t^y. Anche in tal caso la dinamica è *real world*, dato che μ_S rappresenta il rendimento medio del titolo in eccesso del tasso risk-free.

4. Applicazione del modello a PRIIPs in gestione separata

Innanzitutto fissiamo a un anno lo step temporale dei processi stocastici visti nella sezione precedente. Poi osserviamo che per simulare la struttura a termine dei tassi di interesse obbligazionari utilizzando il modello (23) dobbiamo dapprima definire la funzione $f(T)$. In [9] viene proposta la seguente definizione:

$$f(T) := \alpha + \beta e^{-\frac{T}{\tau}} + \gamma \frac{T}{\tau} e^{-\frac{T}{\tau}}. \tag{25}$$

che ha un punto di massimo e un solo punto di flesso. D'altra parte si osservi che una tipica struttura a termine dei tassi di interesse può presentare due o più flessi (si veda ad esempio la figura 1). Inoltre abbiamo certamente bisogno di maggior precisione a scadenze brevi, considerando che l'informazione disponibile sul mercato si concentra principalmente su di esse. Quindi decidiamo di estendere la (25) con due ulteriori componenti (una delle quali già proposta in [9]) per garantire maggior flessibilità all'interpolazione:

$$f(T) := \alpha + \beta_1 e^{-\frac{T}{\tau_1}} + \beta_2 e^{-\frac{T}{\tau_2}} + \gamma_1 \frac{T}{\tau_1} e^{-\frac{T}{\tau_1}} + \gamma_2 \frac{T}{\tau_2} e^{-\frac{T}{\tau_2}}. \tag{26}$$

In particolare, utilizzando la (11) e integrando $f(T)$, si ottiene il seguente polinomio interpolante il prezzo dello ZCB unitario a scadenza in T:

$$\Pi(T) := e^{-\left[\alpha+B(T;\beta_1,\beta_2,\tau_1,\tau_2)+\Gamma(T;\gamma_1,\gamma_2,\tau_1,\tau_2)\right]T} \tag{27}$$

con

$$B(T;\beta_1,\beta_2,\tau_1,\tau_2) := \beta_1\frac{\tau_1}{T}\left(1-e^{-\frac{T}{\tau_1}}\right)+\beta_2\frac{\tau_2}{T}\left(1-e^{-\frac{T}{\tau_2}}\right) \tag{28}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(T;\gamma_1,\gamma_2,\tau_1,\tau_2) &:= \gamma_1\left[\frac{\tau_1}{T}\left(1-e^{-\frac{T}{\tau_1}}\right)-e^{-\frac{T}{\tau_1}}\right]\\ &+ \gamma_2\left[\frac{\tau_2}{T}\left(1-e^{-\frac{T}{\tau_2}}\right)-e^{-\frac{T}{\tau_2}}\right]\end{aligned} \tag{29}$$

ove i parametri α, β_1, β_2, γ_1, γ_2, τ_1 e τ_2 devono essere calibrati sulla base della curva dei tassi attuale. Si noti che la funzione $f(T)$ definita dalla (26) è costituita da cinque componenti. La prima componente è rappresentata dal parametro α, ossia il valore a cui tende il tasso di interesse istantaneo nel lungo periodo:

$$\lim_{T\to+\infty} f(T) = \alpha. \tag{30}$$

La seconda e la terza componente sono rappresentate dai parametri β_1 e β_2, che invece misurano il tasso istantaneo di interesse quando T tende a 0:

$$\lim_{T\to 0} f(T) = \alpha+\beta_1+\beta_2 \tag{31}$$

e contemporaneamente contribuiscono soprattutto alla definizione di $f(T)$ per T piccolo, dato che a entrambe tendono ad annullarsi a scadenze lunghe. Infine la quarta e la quinta componente generano la classica concavità che talvolta caratterizza una tipica struttura a termine dei tassi di interesse. Ciò che ne risulta è, ad esempio, la curva in figura 1.

A questo punto consideriamo una gestione separata in cui la quota b degli attivi a copertura è investita in obbligazioni, che per semplicità supponiamo siano tutti acquistati alla pari e a cedola fissa, mentre la quota rimanente $1-b$ è investita in azioni. Semplificando ulteriormente, supponiamo che ogni titolo obbligazionario venga tenuto fino a scadenza, ossia che il portafoglio di attivi sia composto da n obbligazioni *held to maturity*, oltre che da una quota azionaria.

In $t = 0$, quando un nuovo PRIIP da includere in gestione separata deve essere valutato, ogni obbligazione ha in generale una durata residua a scadenza

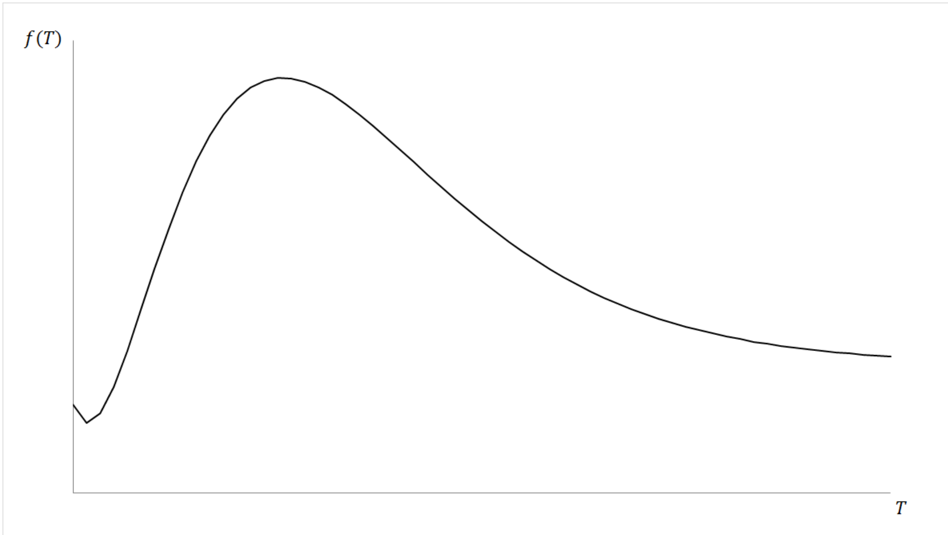

Figura 1: Esempio di funzione $f(T)$

differente, che denotiamo $t_1, \ldots, t_n$. Ciò significa che l'i-esima obbligazione stacca un cedola nota c_i per i successivi t_i anni fino a scadenza. Poiché ogni obbligazione è stata acquistata alla pari, il rendimento annuo equivale al relativo tasso cedolare, che sostanzialmente rappresenta il contributo dell'i-esima obbligazione al rendimento della gestione separata. Più precisamente, se F_i è il nominale dell'i-esima obbligazione, il suo contributo è pari a

$$C_i := \frac{c_i F_i}{\sum_{k=1}^{n} F_k}. \tag{32}$$

In effetti, finché $t \leq \min\{t_1, \ldots, t_n\}$, ossia quando ancora nessuna obbligazione è arrivata a scadenza, il rendimento dell'intera componente obbligazionaria *held to maturity* della gestione separata è

$$R_C := \sum_{i=1}^{n} C_i \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i F_i}{\sum_{k=1}^{n} F_k}, \quad \forall t \leq \min\{t_1, \ldots, t_n\} \tag{33}$$

che è una costante. Non appena l'i-esima obbligazione scade dopo T_i anni dal suo acquisto, verrà verosimilmente sostituita da un titolo simile, ad esempio una nuova obbligazione a cedola fissa con la stessa scadenza a T_i anni (per semplicità supponiamo che T_i sia maggiore della vita del PRIIP, in modo da dover ricorrere all'acquisto di una nuova obbligazione al più una volta). La nuova obbligazione, se acquistata alla pari, rende esattamente il tasso forward $f(t_i+1, T_i)$, che però è stocastico. Pertanto, utilizzando la funzione indicatrice $\chi_{t \le t_i}$, il contributo in t dell'i-esima obbligazione al rendimento della gestione separata può essere scritto come segue:

$$C_i(t) := \frac{[\chi_{t \le t_i} c_i + (1 - \chi_{t \le t_i}) f(t_i + 1, T_i)] F_i}{\sum_{k=1}^{n} F_k} \tag{34}$$

da cui il rendimento stocastico dell'intera componente obbligazionaria *held to maturity* della gestione separata:

$$R_C(t) := \sum_{i=1}^{n} C_i(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{[\chi_{t \le t_i} c_i + (1 - \chi_{t \le t_i}) f(t_i + 1, T_i)] F_i}{\sum_{k=1}^{n} F_k}, \quad \forall t. \tag{35}$$

Il rendimento azionario viene simulato utilizzando la (24). In particolare

$$R_S(t) := \frac{S_t}{S_{t-1}} - 1 = e^{r_{\tau-1} + \left(\mu_S - \frac{\sigma_S^2}{2}\right) + \sigma_S Z} - 1 \tag{36}$$

ove Z denota una distribuzione normale standard.
Noti i rendimenti $R_C(t)$ e $R_S(t)$ rispettivamente per le componenti obbligazionaria e azionaria, il rendimento stocastico della gestione separata è pari a

$$g(t) := bR_C(t) + (1 - b) R_S(t). \tag{37}$$

Talvolta il tasso di rivalutazione è funzione dei rendimenti della gestione negli ultimi N anni. Ad esempio, se consideriamo il caso in cui la rivalutazione sia calcolata in misura pari alla media geometrica degli ultimi N rendimenti, si rivaluta al tasso

$$G(t) := \sqrt[N]{\prod_{k=0}^{N-1} [1 + g(t - k)]} - 1. \tag{38}$$

Tuttavia il tasso di rivalutazione stocastico al tempo t non è solo funzione del tasso di rendimento $G(t)$, ma anche del minimo trattenuto m, delle management fee k e della percentuale di partecipazione agli utili η. Inoltre dobbiamo tener in considerazione il tasso minimo R_{min} garantito agli assicurati, ad esempio utilizzando una garanzia cliquet. In formule

$$\begin{aligned} R(t) &:= \max\{\min\{\eta[G(t) - k], G(t) - k - m\}, R_{min}\} = \\ &= R_{min} + \max\{\min\{\eta[G(t) - k], G(t) - k - m\} - R_{min}, 0\} \end{aligned} \tag{39}$$

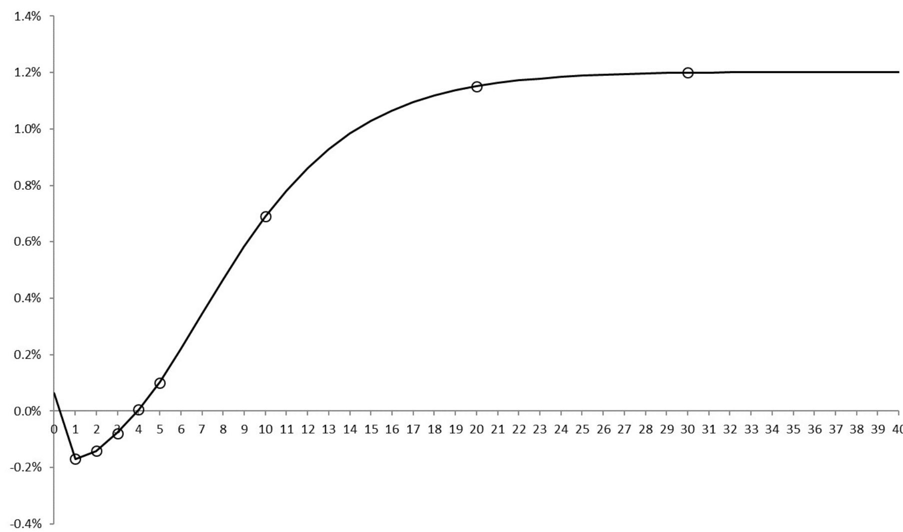

Figura 2: Polinomio $f(T)$ che interpola la curva Eurirs

supponendo di non aver precontato alcun tasso tecnico (pratica peraltro piuttosto diffusa nell'ambito dei prodotti vita in gesione separata).

5. Simulazione e risultati

Come abbiamo visto nelle sezioni precedenti, il modello nel suo complesso è funzione di numerosi parametri, alcuni da calibrare e altri da fissare in modo opportuno.
Calibrando il polinomio $f(T)$ della (26) sui tassi Eurirs al 25/11/2016, si ottengono i parametri $\alpha = 1.203$, $\beta_1 = -2.733$, $\beta_2 = 1.594$, $\gamma_1 = -1.529$, $\gamma_2 = -4.093$, $\tau_1 = 1.059$ e $\tau_2 = 3.267$, da cui la curva in figura 2. I parametri del processo stocastico del tasso a breve nella (23) sono gli stessi già utilizzati in [7], tranne d_x e d_y, che devono in qualche modo rappresentare lo spread tra i titoli obbligazionari in gestione separata e il tasso risk-free, ovvero Eurirs. Per semplicità supponiamo che tali titoli siano esclusivamente bond governativi italiani: in tal caso fissiamo d_x e d_y in modo da garantire uno spread medio a 10 anni approssimativamente uguale allo spread osservato sul mercato, ossia circa 141 bps al 25/11/2016. Quindi basta porre $d_x = d_y = 1.34\%$. Naturalmente il processo di tasso aggiustato per lo spread viene utilizzato solo per calcolare il rendimento delle obbligazioni acquistate

in futuro, ma parallelamente viene simulato un tasso risk-free (ovvero senza aggiustamento) con cui calcolare i fattori di sconto mediante la (15).
Il processo stocastico della componente azionaria nella (24) è funzione solo del drift e della volatilità di S. Per la stima di tali parametri consideriamo rispettivamente la media e la deviazione standard dei rendimenti logaritmici di un qualche indice di mercato significativo su un certo orizzonte temporale altrettanto significativo. In questo caso utilizziamo la serie storica dei rendimenti mensili dell'indice S&P 500 o FTSE MIB a partire dal 2011 fino al 25/11/2016:

	S&P 500	FTSE MIB
μ_S	8.43%	-0.69%
σ_S	11.56%	21.65%

Tuttavia si osservi che nella (24) il tasso risk-free è una componente separata dal drift μ_S, che quindi rappresenta sostanzialmente il premio al rischio (e non il rendimento totale) del titolo azionario. Pertanto i rendimenti storici dei due indici azionari sono stati ridotti in misura del tasso risk-free storico corrispondente, in tal caso l'EONIA, probabilmente il più adatto trattandosi di un tasso *overnight*.
La componente obbligazionaria della gestione separata è costituita da tre BTP, così come mostrato dalla tabella seguente:

	quota	coupon	vita residua	scadenza
BTP1	33.3%	1.0%	10 anni	10 anni
BTP2	33.3%	1.5%	5 anni	15 anni
BTP3	33.3%	3.0%	7 anni	30 anni

Quindi il BTP1 è stato appena acquistato, il BTP2 è stato acquistato 10 anni fa e il BTP3 è stato acquistato 23 anni fa. Come già detto nella sezione precedente, si suppone che, non appena scada una delle obbligazioni in portafoglio, ne venga acquistata un'altra con la stessa scadenza e rendimento pari al corrispondente tasso forward derivato dalla simulazione stocastica del tasso di interesse.
Infine non resta che fissare le caratteristiche del PRIIP. Per i nostri scopi è più che sufficiente un semplice capitale differito con partecipazione agli utili η pari a 80%, management fee k pari a 0.1%, minimo trattenuto m pari a 0.4% e minimo garantito R_{min} pari a 1%.
Detto ciò, ci interessa analizzare come varia il VEV e la relativa assegnazione

della classe MRM in funzione della vita del prodotto e della quota azionaria presente in gestione separata. Ogni VEV viene calcolato mediante un Monte Carlo con 10000 simulazioni.
Se la componente azionaria della gestione separata è ben rappresentata dallo S&P 500, i risultati che si ottengono sono illustrati in figura 3, in cui vengono anche segnalate le soglie delle varie classi MRM mediante le rette orizzontali parallele. Il PRIIP appartiene alla prima classe, cioè la meno rischiosa, solo se ha scadenza 10 anni (o presumibilmente inferiore) e nessuna componente azionaria. In altre parole, un prodotto assicurativo le cui passività sono coperte esclusivamente da obbligazioni governative a scadenza medio-breve potrebbe essere considerato un prodotto quasi senza rischio.
Tuttavia, non appena viene inclusa una pur minima componente azionaria, già si supera la prima soglia. Questo fa pensare che è molto improbabile trovare un PRIIP in gestione separata assegnato alla classe 1, considerato il fatto che tutte le gestioni separate includono un qualche investimento in titoli azionari.
Indipendentemente dalla vita del PRIIP, il VEV cresce in modo monotono e solo apparentemente lineare al crescere della componente azionaria. Inoltre l'aumento appare più marcato al crescere della vita del prodotto, dato che le tre curve non sembrano essere parallele.
È curioso notare che il PRIIP di durata 10 anni non entra mai in classe 4, che di fatto può essere considerata la prima classe "speculativa", includendo volatilità fino al 20% annuo. Sostanzialmente questo significa che un fondo che investe solo nell'indice S&P 500 e garantisce un tasso minimo (in altre parole, una index-linked) è considerato piuttosto sicuro, anche se la stessa figura 3 suggerisce che non appena la volatilità dell'indice aumentasse anche solo marginalmente, la classe da assegnare allo stesso PRIIP sarebbe immediatamente la 4. Invece i PRIIPs di durata 15 o 20 anni possono appartenere solo alle classi 2, 3 o 4 in funzione della loro componente azionaria. In ogni caso, i tre PRIIPs sembrano ancora ben lontani dalla classe 5.
Se la componente azionaria della gestione separata è ben rappresentata dal FTSE MIB, i risultati che si ottengono sono illustrati in figura 4, ancora con le soglie delle varie classi MRM. Stavolta la curvatura è più evidente, ma anche qui le tre curve non sono parallele, anzi si distanziano al crescere della componente azionaria in portafoglio.
Come abbiamo visto precedentemente in questa sezione, la volatilità del FTSE MIB è quasi il doppio di quella dello S&P 500. Di conseguenza il PRIIP di durata 10 anni non solo è già in classe 4 quando circa metà della

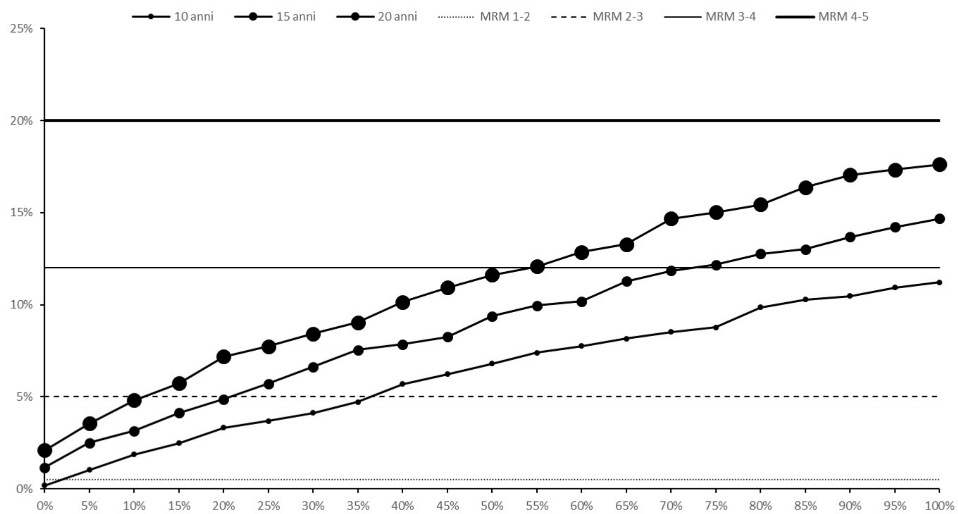

Figura 3: VEV in funzione della componente S&P 500 in gestione separata

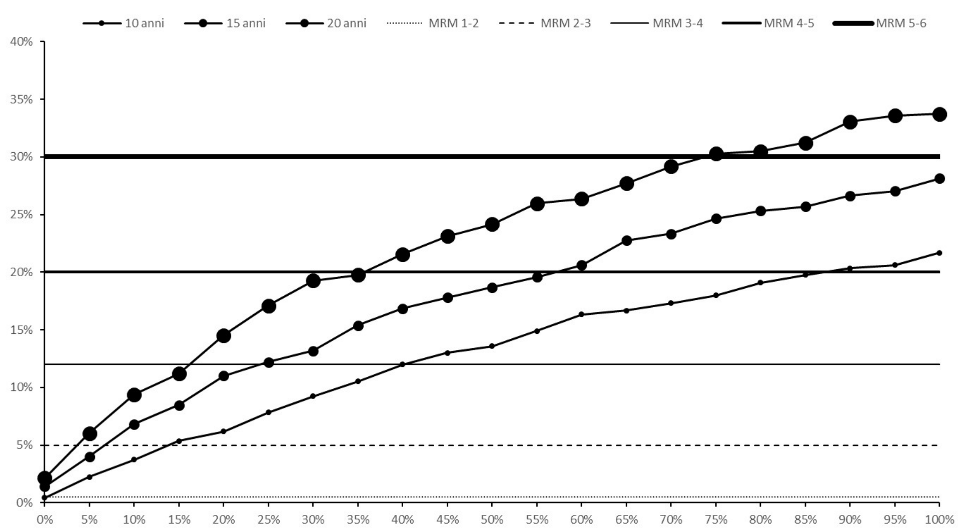

Figura 4: VEV in funzione della componente FTSE MIB in gestione separata

gestione separata è investita nell'indice, ma addirittura arriva in classe 5 se investe esclusivamente nell'indice stesso (sostanzialmente una index-linked sul FTSE MIB).
Se il PRIIP di durata 15 anni sembra evitare la classe 6 (anche se di poco), il PRIIP di durata 20 anni viene assegnato alla classe 6 non appena almeno l'80% degli attivi è investito nell'indice, raggiungendo e superando il 30% di volatilià.
A conclusione della sezione vale la pena sottolineare che una tipica gestione separata investe solo marginalmente in indici o titoli azionari. Questo implica che è molto improbabile l'assegnazione di un prodotto tradizionale alla classe 4 o superiori. I risultati ottenuti in corrispondenza di elevate componenti azionarie possono essere eventualmente ricondotti a prodotti assicurativi meno tradizionali, non solo index-linked e unit-linked, ma anche *variable annuities*, prodotti ibridi (cioè che investono in più fondi separati, sia obbligazionari che azionari) statici o dinamici, e così via.

6. Limiti, estensioni e conclusioni

Il modello utilizzato è pensato per risolvere in maniera semplice, ancorché consistente e *compliant* con il Regolamento [4], il problema della valutazione del rischio di mercato di un PRIIP. Indubbiamente un vero modello ALM sarebbe molto più preciso e, in qualche modo, meno constestabile, innanzitutto perché consentirebbe un calcolo teoricamente corretto del rendimento della gestione separata, pari al rapporto esatto tra conto economico e giacenza media. In effetti nel nostro modello abbiamo tacitamente ipotizzato che il rendimento aggregato degli attivi sia uguale al rendimento della gestione separata: pur essendo per definizione una buona approssimazione, non è un'equivalenza. In particolare non teniamo affatto conto di tutti quei casi in cui la compagnia può vendere titoli *available for sale*, sia azionari che obbligazionari, per realizzare plusvalenze. Di fatto supponiamo che tutti i titoli siano *held to maturity*, sebbene nella pratica le compagnie tengano titoli *available for sale* in portafoglio.
D'altra parte è improbabile che le compagnie assicurative posseggano un modello ALM utilizzabile per il tipo di valutazione di cui abbiamo bisogno, dato che in genere i modelli ALM sono tarati per valutazioni Solvency 2. Alla base di essi ci sono ipotesi che non permettono un passaggio naturale alla valutazione del PRIIP. Come già accennato in precedenza, valutare il rischio di mercato di un PRIIP vuol dire assumere il punto di vista del cliente che an-

cora non ha acquistato il prodotto, immaginando che arrivi a scadenza con certezza e valuti un prodotto assicurativo con occhi *real world*.
Aggiungiamo che l'accuratezza richiesta da Solvency 2, necessaria per calcolare quantità monetarie concrete e considerevoli come il TVOG o l'SCR, forse non è necessaria per valutare un PRIIP. Il Regolamento [4] chiede sostanzialmente di dare un'indicazione veritiera al cliente riguardo la rischiosità del prodotto. Qualunque sia il VEV che otteniamo, servirà solo a individuare un punteggio, che poi sarà facilmente verificabile ed eventualmente contestabile mediante confronti con prodotti simili sul mercato. In più il mercato assicurativo e la complessità dei suoi prodotti sono in continua evoluzione, ed avere un modello agile e facilmente adattabile può essere la chiave giusta.
Il modello e la successiva applicazione presentati in questo paper evitano varie complicazioni che andrebbero oltre lo scopo della pura ricerca. Una compagnia potrebbe facilmente adattare il modello tenendo in considerazione che

- il modello stocastico gaussiano a due fattori è il più semplice dal punto di vista analitico e garantisce una buona flessibilità nella simulazione dei tassi di interesse, ma l'estensione ad un modello più complesso, ad esempio a tre o quattro componenti, è immediata;

- gli attivi a copertura, che qui si riducevano a tre BTP e un indice di mercato, possono essere modificati a piacere senza grossi problemi, fino a rappresentare l'intero portafoglio;

- il modello può essere esteso a prodotti differenti, soprattutto a tutti quei prodotti caratterizzati da un collegamento diretto fra attivi a copertura e rivalutazione (index-linked, unit-linked, attivi specifici, *variable annuities*, prodotti ibridi, ecc.).

In questo paper abbiamo concluso che il prodotto assicurativo più comune e meno rischioso sul mercato italiano oscilla tra la classe 2 e la classe 3 del Regolamento [4], mentre può occupare la classe 1 o le classi superiori alla 3 solo saltuariamente. Si tratta di un risultato ragionevole, pur essendo stato provato solo empiricamente attraverso un'applicazione specifica. Allo stesso tempo, non appena la componente azionaria diventa più consistente rispetto ad una tipica gestione separata, il prodotto si sposta nelle classi più rischiose, anche in funzione della scadenza. Quindi ci si può aspettare che i prodotti più complessi e rischiosi saranno principalmente destinati alle classi 4-7.

Riferimenti bibliografici

[1] Brigo D., Mercurio F. (2001), *Interest Rate Models: Theory and Practice*, Springer.

[2] De Felice M., Moriconi F. (2002), *Finanza dellassicurazione sulla vita. Principi per l'asset-liability management e per la misurazione dellembedded value*, Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari.

[3] De Felice, M., Moriconi, F. (2005), *Marked Based Tools for Managing the Life Insurance Company*, Astin Bulletin.

[4] European Commission (2016), *Supplementing Regulation (EU) No 1286/2014 of the European Parliament and of the Council on key information documents for packaged retail and insurance-based investment products (PRIIPs).*

[5] European Commission (2016), *Annexes to the Supplementing Regulation (EU) No 1286/2014 of the European Parliament and of the Council on key information documents for packaged retail and insurance-based investment products (PRIIPs).*

[6] Jamshidian F., Zhu Y. (1997), *Scenario Simulation: Theory and methodology*, Finance and Stochastics 1.

[7] Produktinformationsstelle Altersvorsorge, *Basismodell der Produktinformationsstelle Altersvorsorge (PIA)*, http://www.produktinformationsstelle.de/assets/PIA-Kapitalmarktmodell-Basisprozesse.pdf.

[8] Rebonato R. (1998), *Interest Rate Option Models*, Wiley.

[9] Svensson L. (1994), *Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994*, NBER Working Paper Series.