

Il modello di Vasicek a 2 fattori: calibrazione e validazione con l'applicazione del filtro di Kalman

Angelo Troiani

La Sapienza, Università di Roma, Dipartimento di Statistica,
Viale Regina Elena 295, 00161 Roma (Italia)
angelo.troiani@uniroma1.it

9 Aprile 2017

Sommario

L'articolo propone una tecnica di calibrazione per un modello gaussiano bifattoriale per la struttura dei tassi di interesse nominali. La procedura è finalizzata alla stima dei parametri del modello secondo le misure di probabilità naturale e neutrale verso il rischio e si basa sull'applicazione del *Kalman filter*. La tecnica prevede inoltre l'utilizzo di sequenze *quasi-random* di Sobol per la definizione dei parametri iniziali della procedura di ottimizzazione. Il modello stimato è utilizzato per il calcolo del *Solvency Capital Requirement* di *zcb* su diverse scadenze. Due test dell'algoritmo di calibrazione sono stati infine effettuati per la validazione della procedura.

Keywords: Vasicek, Kalman filter, rischio di tasso di interesse, Solvency 2, modello interno, Sobol, Solvency Capital Requirement.

1 Introduzione

La direttiva Solvency 2¹, entrata in vigore il 1 gennaio 2016, richiede alle imprese di assicurazione un livello di patrimonializzazione adeguato al rischio a cui sono esposte. Il cosiddetto “*Solvency Capital Requirement*” (SCR) è infatti definito come *Value at Risk* (VaR) dei fondi propri di base dell'impresa di assicurazione soggetto ad un livello di confidenza del 99,5 per cento su un periodo di un anno. Il calcolo del VaR implica quindi la definizione di un modello² che determini la distribuzione di probabilità prospettica dei fondi propri dell'impresa. Per raggiungere tale obiettivo è richiesta una duplice calibrazione del modello utilizzato, sia in base alla misura di probabilità naturale che a quella neutrale verso il rischio. La prima misura è necessaria per la simulazione su un orizzonte temporale annuale delle sorgenti di rischio a cui l'impresa è esposta, mentre la seconda consente la valutazione dei contratti complessi che la costituiscono. In tale ambito, la validità di un modello e la sua capacità

¹Pubblicata sulla Gazzetta ufficiale dell'Unione Europea in seguito all'approvazione del Parlamento Europeo e Consiglio dell'Unione Europea (2009).

²L'approccio qui definito si riferisce al caso in cui le imprese di assicurazione decidano di implementare un “modello interno” per il calcolo del SCR. Le imprese che utilizzano un modello interno sviluppano ogni sua componente al fine di rappresentare nel modo più preciso possibile il loro profilo di rischio e sono soggette ad una procedura di approvazione da parte dell'Autorità di vigilanza. Le Compagnie che non utilizzano un modello interno, calcolano il SCR applicando la “formula standard”, un modello predefinito dal legislatore e calibrato sulla base di dati relativi al mercato assicurativo europeo.

di adattarsi ai dati assicura che i requisiti patrimoniali di un'impresa di assicurazione rappresentino adeguatamente il rischio che ha assunto.

L'esigenza di definire, calibrare e validare modelli di misurazione dei rischi è quindi aumentata con l'evoluzione della normativa comunitaria degli ultimi anni. Questo articolo, rispondendo a tale necessità, propone una tecnica per la calibrazione di un modello stocastico per la valutazione del rischio di tasso di interesse. Il modello considerato è un modello gaussiano bifattoriale *mean reverting*, ossia un modello di Vasicek a 2 fattori per la struttura dei tassi di interesse. Questo modello rientra nella classe degli *hidden Markov model* poichè si basa sulla definizione della dinamica stocastica di una variabile non osservabile, il cosiddetto *short rate*. Non potendo osservare direttamente lo *short rate*, la calibrazione del modello è effettuata sulla base dell'osservazione delle intensità di rendimento a scadenza, che si configurano come un funzionale del tasso a breve.

Analogamente a quanto proposto in letteratura da Babbs e Nowman (2001), Bolder (2001) e Chen e Scott (2003), la metodologia qui presentata ha l'obiettivo di stimare i parametri del modello attraverso l'applicazione del *Kalman filter*, un filtro ricorsivo che valuta lo stato di un sistema dinamico a partire da una serie di misure soggette a rumore. In base al nostro modello, infatti, le intensità di rendimento a scadenza sono il risultato della realizzazione di due fattori gaussiani non osservabili dei quali siamo interessati a conoscere i parametri che ne governano le dinamiche. Rispetto alla tecnica di calibrazione presentata nei lavori di Babbs e Nowman (2001), Bolder (2001) e Chen e Scott (2003), la tecnica riportata in questo articolo prevede l'utilizzo di sequenze *quasi-random* di Sobol³ per la definizione dei parametri iniziali forniti in input all'algoritmo di ottimizzazione.

Inizialmente l'articolo presenta il modello di Vasicek a due fattori e le sue caratteristiche, poi si concentra sulle basi teoriche del *Kalman filter* e sull'applicazione del filtro al modello prescelto. In seguito vengono riportati i risultati della calibrazione sui dati di mercato. I parametri ottenuti vengono poi utilizzati per calcolare il requisito patrimoniale di solvibilità in ottica Solvency 2 di *zero coupon bond* (zcb) su con scadenze da 1 a 100 anni. Infine, vengono analizzati i risultati di due test di validazione della tecnica di calibrazione utilizzata.

2 Il modello di Vasicek a 2 fattori

Il modello utilizzato per descrivere la dinamica dello *short rate* è un modello gaussiano bifattoriale *mean reverting*, anche detto "modello di Vasicek a 2 fattori". Nel modello lo *short rate* è uguale alla somma di due variabili di stato o fattori ($x_1(t)$ e $x_2(t)$):

$$r(t) = x_1(t) + x_2(t). \quad (1)$$

Le due variabili di stato sono definite in base alla seguente dinamica stocastica secondo la misura naturale \mathbb{P} :

$$\begin{aligned} dx_1(t) &= k_1(\theta_1 - x_1(t))dt + \sigma_1 dZ_1(t), \\ dx_2(t) &= k_2(\theta_2 - x_2(t))dt + \sigma_2 dZ_2(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Assumiamo inoltre che i due fattori siano dipendenti tra loro in modo tale che valga la relazione $dZ_1(t)dZ_2(t) = \rho dt$, ossia che la correlazione istantanea tra i due moti browniani standard Z_1 e Z_2 sia uguale a ρ . Ad un modello così specificato corrisponde una distribuzione di probabilità condizionata di tipo normale bivariata per i due fattori. Inoltre, la media di $r(T)$ dato $r(t)$, con $T > t$ risulta:

³Vedi Glasserman (2003) per ulteriori dettagli.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t[r(T)] &= \mathbb{E}_t[x_1(T)] + \mathbb{E}_t[x_2(T)] \\ &= \theta_1(1 - e^{-k_1(T-t)}) + e^{-k_1(T-t)}x_1(t) + \theta_2(1 - e^{-k_2(T-t)}) + e^{-k_2(T-t)}x_2(t), \end{aligned} \quad (3)$$

e la varianza è data da:

$$\begin{aligned} \text{Var}_t[r(T)] &= \text{Var}_t[x_1(T)] + \text{Var}_t[x_2(t + \tau)] + 2\text{Cov}_t[x_1(T), x_2(T)] \\ &= \frac{\sigma_1^2}{2k_1}(1 - e^{-2k_1(T-t)}) + \frac{\sigma_2^2}{2k_2}(1 - e^{-2k_2(T-t)}) + 2\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{k_1 + k_2}(1 - e^{-(k_1+k_2)(T-t)}). \end{aligned} \quad (4)$$

Per la definizione completa del modello, definiamo il premio per il rischio $\Lambda(t)$ come un vettore composto dalle seguenti 2 componenti:

$$\begin{aligned} \Lambda_1(t) &= \lambda_{11} + \lambda_{12}x_1(t), \\ \Lambda_2(t) &= \lambda_{21} + \lambda_{22}x_2(t), \end{aligned} \quad (5)$$

con $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22} \in \mathbb{R}$.

In base alla classificazione di Duffee (2002), con tale specificazione del premio per il rischio, il modello in esame rientra nella categoria dei modelli “essenzialmente affini”. Questi modelli generalizzano i modelli “completamente affini” (come ad es. il modello di Vasicek o il modello CIR) e consentono una maggiore flessibilità nella stima del premio per il rischio nel caso di serie storiche molto ampie.

I parametri che caratterizzano il modello secondo la misura di probabilità neutrale verso il rischio \mathbb{Q} possono essere ottenuti come segue a partire dai parametri naturali:

$$\begin{aligned} \hat{k}_j &= k_j + \sigma_j \lambda_{j2}, \\ \hat{\theta}_j &= \frac{k_j \theta_j - \sigma_j \lambda_{j1}}{\hat{k}_j}, \end{aligned} \quad (6)$$

dove $j = 1, 2$ rappresenta l'indice che si riferisce ai due fattori x_1 e x_2 .

Il modello così definito ammette una soluzione in formula chiusa per il prezzo $P(t, T, x_1, x_2)$ di uno zcb con scadenza in T , valutato in t . Riadattando i risultati ottenuti da Bolder (2001) al caso di un modello di Vasicek bifattoriale essenzialmente affine ed omettendo la dipendenza dai fattori x_1 e x_2 di P nella notazione, otteniamo la seguente equazione generale di valutazione:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \hat{k}_i (\hat{\theta} - x_i) \frac{\partial P}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\rho \sigma_i \sigma_j}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j} - rP = 0. \quad (7)$$

Con la condizione al contorno $P(T, T) = 1$, la (7) ammette la seguente soluzione in forma chiusa per il prezzo di uno zcb:

$$P(\tau, x_1, x_2) = e^{A(\tau) - \sum_{i=1}^2 B_i(\tau)x_i}, \quad (8)$$

in cui $\tau = T - t$ e:

$$B_i(\tau) = \frac{1}{\hat{k}_i} (1 - e^{-\hat{k}_i \tau}),$$

$$A(\tau) = \sum_{i=1}^2 \left(\left(\hat{k}_i^2 \hat{\theta}_i - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) \frac{(B_i(\tau) - \tau)}{\hat{k}_i^2} - \frac{\sigma_i^2 B_i^2(\tau)}{4\hat{k}_i} \right) + \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\hat{k}_1\hat{k}_2} \left(\tau - B_1(\tau) - B_2(\tau) + \frac{1}{\hat{k}_1 + \hat{k}_2} (1 - e^{-(\hat{k}_1 + \hat{k}_2)\tau}) \right).$$

Di conseguenza, la relazione affine tra le intensità di rendimento a scadenza di uno zcb con vita residua a scadenza τ è:

$$y(\tau, x_1, x_2) = \frac{A(\tau)}{\tau} - \frac{\sum_{i=1}^2 B_i(\tau) x_i}{\tau}. \quad (9)$$

Il modello selezionato prevede inoltre i seguenti risultati asintotici per il valore atteso e la varianza di $r(t)$ secondo la misura di probabilità naturale:

$$\begin{aligned} E_t[r(\infty)] &= \lim_{T \rightarrow \infty} E_t[r(T)] = \theta_1 + \theta_2 \\ \text{Var}_t[r(\infty)] &= \lim_{T \rightarrow \infty} \text{Var}_t[r(T)] = \frac{\sigma_1^2}{2k_1} + \frac{\sigma_2^2}{2k_2} + 2 \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{k_1 + k_2} \end{aligned} \quad (10)$$

Inoltre, è possibile ricavare in modo analitico anche l'espressione dell'intensità di rendimento a scadenza per durata residua infinita, secondo la misura di probabilità neutrale verso il rischio:

$$y_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} y(t, T) = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{\log P(t, T)}{T - t} = \sum_{i=1}^2 \left(\hat{\theta}_i - \frac{\sigma_i^2}{2\hat{k}_i^2} \right) - \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\hat{k}_1\hat{k}_2} \quad (11)$$

I risultati riportati in questo paragrafo ci consentono di calibrare il modello definito nella (1) sulla base delle serie storiche delle intensità di rendimento a scadenza osservate sul mercato. In particolare, saremo in grado di stimare sia i parametri naturali del modello (ossia k , θ , σ e ρ) che i corrispondenti parametri neutrali verso il rischio (\hat{k} e $\hat{\theta}$), ottenendo conseguentemente anche una stima implicita del premio per il rischio.

La (11) consente inoltre di sfruttare la relazione tra y_∞ , $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ per esprimere il modello secondo una parametrizzazione alternativa rispetto a quella definita nella (2). L'implementazione del modello presentata in questo articolo è infatti basata sulla calibrazione diretta di y_∞ in luogo di $\hat{\theta}_1$.

3 Il Kalman filter

Nella sezione precedente sono stati presentati il modello di Vasicek a 2 fattori e la formula chiusa per il calcolo del prezzo di uno zcb. che evidenziano la relazione affine tra le intensità di rendimento a scadenza $y(t, T)$ e le variabili di stato (cioè i fattori x_1 e x_2). La funzione che lega $y(t, T)$ a x_1 e x_2

dipende inoltre da un insieme di parametri che devono essere calibrati per riprodurre adeguatamente la dinamica osservata sul mercato delle intensità di rendimento a scadenza.

La procedura di calibrazione che applicheremo per determinare l'insieme dei parametri si basa su una tecnica econometrica nota come *Kalman Filter*, che consente di sfruttare la relazione affine tra i fattori e le intensità di rendimento a scadenza per la stima dei parametri del modello.

Per l'applicazione del *Kalman Filter* è necessario scrivere il modello presentato nella sezione 2 come *state space model*, un sistema costituito da una serie di variabili non direttamente osservabili $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (ad es. i fattori che determinano lo *short rate*) a cui è associato un insieme di osservazioni y_1, \dots, y_n (ad es. le intensità di rendimento a scadenza); la relazione tra le α_t e le y_n è specificata dallo *state space model*. Il principale obiettivo della nostra analisi sarà quindi quello di utilizzare questa rappresentazione per stimare i parametri relativi alla dinamica delle variabili non osservabili.

3.1 Aspetti teorici

Durbin e Koopman (2012) definiscono uno *state space Gaussian model* come segue:

$$\begin{aligned} y_t &= d_t + Z_t \alpha_t + \epsilon_t, & \epsilon_t &\sim N(0, H_t), \\ \alpha_{t+1} &= c_t + T_t \alpha_t + R_t \eta_t, & \eta_t &\sim N(0, Q_t) \quad t = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (12)$$

dove y_t è definito come *observation vector* mentre α_t rappresenta lo *state vector*. La prima equazione della (12) è nota in letteratura come *observation equation*, mentre la seconda come *state equation*. Assumiamo che le matrici Z_t, T_t, R_t, H_t, Q_t e i vettori d_t e c_t siano noti e che gli errori ϵ_t e η_t siano indipendenti tra loro in tutti gli istanti futuri. Assumiamo inoltre che lo *state vector* iniziale α_1 sia $N(a_1, P_1)$, con a_1 e P_1 noti, e indipendenti da $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ e η_1, \dots, η_n . Le dimensioni degli elementi presenti nella (12) sono riportate nella Tabella 1.

Tabella 1: Dimensioni dello *state space model*

Vettore	Matrice
y_t	$p \times 1$ Z_t $p \times m$
α_t	$m \times 1$ T_t $m \times m$
d_t	$p \times 1$ H_t $p \times p$
c_t	$m \times 1$ R_t $m \times r$
ϵ_t	$p \times 1$
η_t	$r \times 1$ Q_t $r \times r$

Il *Kalman filter* applicato al modello definito nella (12), come riportato da Durbin e Koopman (2012), è definito dal seguente insieme di formule ricorsive:

$$\begin{aligned} v_t &= y_t - E[y_t|Y_{t-1}] = y_t - Z_t a_t, & F_t &= Var[v_t|Y_{t-1}] = Z_t P_t Z_t' + H_t, \\ a_{t|t} &= E[\alpha_t|Y_t] = a_t + P_t Z_t' F_t^{-1} v_t, & P_{t|t} &= Var[\alpha_t|Y_t] = P_t - P_t Z_t' F_t^{-1} Z_t P_t, \\ a_{t+1} &= E[\alpha_{t+1}|Y_t] = T_t a_{t|t} + c_t, & P_{t+1} &= Var[\alpha_{t+1}|Y_t] = T_t P_{t|t} T_t' + R_t Q_t R_t'. \end{aligned} \quad (13)$$

La sequenza definita nella (13) è il risultato dell'applicazione di risultati standard della teoria relativa alla regressione normale multivariata e ci consente di aggiornare la nostra conoscenza del sistema ogni

Tabella 2: Dimensioni del *Kalman filter*

Vettore	Matrice		
v_t	$p \times 1$	F_t	$p \times p$
a_t	$m \times 1$	P_t	$m \times m$
$a_{t t}$	$m \times 1$	$P_{t t}$	$m \times m$

volta che una nuova osservazione viene effettuata. Le dimensioni dei vettori e delle matrici presenti nella (13) sono riportati nella Tabella 2.

Il filtro ha la caratteristica di non essere eccessivamente oneroso dal punto di vista computazionale, infatti l'unica operazione complessa che prevede riguarda l'inversione della matrice F_t .

Per quanto riguarda invece la matrice di covarianza $P_{t|t}$, questa deve essere sempre definita positiva e simmetrica. Al fine di assicurarsi la simmetria di $P_{t|t}$, come riportato da Andrews e Grewal (2001), è possibile utilizzare la seguente formulazione alternativa, nota in letteratura come *Joseph form*:

$$P_{t|t} = (I - K_t Z_t) P_t (I - K_t Z_t)' + K_t H_t K_t',$$

dove $K_t = P_t Z_t F_t^{-1}$.

La *log-verosimiglianza* del modello descritto in questa sezione assume quindi la forma:

$$\log L(Y_n) = -\frac{np}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n (\log |F_t| + v_t' F_t^{-1} v_t). \quad (14)$$

3.2 Implementazione del modello

In questa sezione verrà presentato il modello definito nella sezione 2 nella sua formulazione di *state space model*. A tal fine definiamo come variabili osservate y_t le intensità di rendimento a scadenza $y(t, T)$, già definite nella (9):

$$y(t, T) = -\frac{\log P(t, T)}{T - t} = \frac{-A(t, T) + \sum_{i=1}^2 B_i(t, T) x_i(t)}{T - t}$$

Supponendo di osservare le intensità di rendimento a scadenza per n diverse vite residue a scadenza τ_1, \dots, τ_n e ipotizzando un intervallo di tempo tra una misurazione e la successiva $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ con $i = 1, \dots, N$, l'*observation equation*, sulla base dei risultati riportati nella (8), sarà:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(t_i, t_i + \tau_1) \\ \vdots \\ y(t_i, t_i + \tau_n) \end{bmatrix}}_{y_{t_i}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-A(\tau_1)}{\tau_1} \\ \vdots \\ \frac{-A(\tau_n)}{\tau_n} \end{bmatrix}}_d + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-B_1(\tau_1)}{\tau_1} & \frac{-B_2(\tau_1)}{\tau_1} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{-B_1(\tau_n)}{\tau_n} & \frac{-B_2(\tau_n)}{\tau_n} \end{bmatrix}}_Z \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t_i) \\ x_2(t_i) \end{bmatrix}}_{x_{t_i}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon_1(t_i) \\ \vdots \\ \epsilon_n(t_i) \end{bmatrix}}_{\epsilon_{t_i}}, \quad (15)$$

dove $\epsilon_{t_i} \sim N(0, H)$, con H matrice diagonale $n \times n$ con elementi $H_{ii} = h^2$ per $i = 1, \dots, n$.

Per quanto riguarda la *state equation*, facendo invece riferimento alle equazioni (3) e (4) riportate nella sezione 2, la dinamica dei fattori del modello è definita come segue:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t_i) \\ x_2(t_i) \end{bmatrix}}_{x_{t_i}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_1(1 - e^{-k_1\Delta t}) \\ \theta_2(1 - e^{-k_2\Delta t}) \end{bmatrix}}_c + \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-k_1\Delta t} & 0 \\ 0 & e^{-k_2\Delta t} \end{bmatrix}}_T \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t_{i-1}) \\ x_2(t_{i-1}) \end{bmatrix}}_{x_{t_i}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \eta_1(t_i) \\ \eta_2(t_i) \end{bmatrix}}_{\epsilon_{t_i}}, \quad (16)$$

dove $\eta_{t_i} \sim N(0, Q)$ e

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1^2}{2k_1}(1 - e^{-2k_1(T-t)}) & \rho \frac{\sigma_1\sigma_2}{k_1+k_2}(1 - e^{-(k_1+k_2)(T-t)}) \\ \rho \frac{\sigma_1\sigma_2}{k_1+k_2}(1 - e^{-(k_1+k_2)(T-t)}) & \frac{\sigma_2^2}{2k_2}(1 - e^{-2k_2(T-t)}) \end{bmatrix}$$

Riassumendo, lo *state space model* per il modello di Vasicek a 2 fattori risulta quindi definito dal seguente sistema:

$$\begin{aligned} y_{t_i} &= d + Zx_{t_i} + \epsilon_{t_i} \\ x_{t_i} &= c + Tx_{t_{i-1}} + \eta_{t_i} \end{aligned} \quad (17)$$

Il *Kalman filter* è quindi automaticamente definito sulla base delle matrici Z, T, H, Q e dei vettori y_{t_i}, x_{t_i}, d, c definiti nelle equazioni (15) e (16). Conseguentemente, i parametri del modello vengono determinati attraverso la massimizzazione della *log-likelihood* del *Kalman filter*, determinata sulla base dei dati di input (per es. la serie storica delle intensità di rendimento a scadenza di *zcb* a diverse scadenze) e di un insieme di parametri iniziali per l'algoritmo di ottimizzazione.

4 Calibrazione su dati di mercato

In questa sezione sono riportati i risultati dell'applicazione a dati di mercato reali della tecnica di stima presentata nei paragrafi precedenti. In particolare, sono stati presi in considerazione 5 anni di dati relativi ai tassi Euro Swap (fisso a 1 anno, variabile a 6 mesi) con *tenor* 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40 e 50 anni, osservati su base giornaliera a partire dal 1 Gennaio 2012. La fonte dei dati utilizzati è stata il data provider *Bloomberg*, il software di riferimento per l'implementazione del modello \mathbf{R} e la data di valutazione il 01/01/2017. La Figura 1 mostra i dati di mercato utilizzati per la calibrazione del modello.

L'algoritmo di ottimizzazione utilizzato è il *Nelder Mead*, anche noto come metodo del semplice. Definito da Nelder e Mead (1965), il metodo è ampiamente utilizzato nel caso di funzioni molto irregolari (come la (14)) che non consentono l'utilizzo di metodi di ottimizzazione basati sul gradiente della funzione obiettivo.

La procedura seguita per la calibrazione del modello può essere riassunta nei seguenti punti:

1. I dati di mercato sono stati trasformati in modo da ottenere le intensità di rendimento a scadenza corrispondenti ai tassi swap osservati attraverso l'interpolazione lineare delle scadenze mancanti nella serie storica e l'applicazione della tecnica del *bootstrapping*.

2. Sono state utilizzate 800 procedure di ottimizzazione ognuna a partire da un diverso insieme di parametri iniziali. Ogni vettore dei parametri iniziali è stato opportunamente selezionato utilizzando sequenze *quasi-random di Sobol*⁴ definite sugli intervalli riportati nella Tabella 3. La scelta di utilizzare la sequenza *quasi-random di Sobol* deriva dalla sua proprietà di essere una sequenza a *bassa discrepanza*. Il concetto di discrepanza nasce dalla necessità di misurare il grado di uniformità di un insieme di punti e si definisce infatti come una misura dell'irregolarità della loro distribuzione nello spazio. Il nostro obiettivo è proprio quello di trovare un insieme di parametri iniziali che copra nel modo più efficace possibile lo spazio di tutti i parametri possibili, pertanto le sequenze di numeri *quasi-random* sono per definizione le più adatte a raggiungere l'obiettivo prefissato⁵.

Tabella 3: Intervalli di estrazione delle sequenze di numeri *quasi-random di Sobol* per la definizione dei parametri iniziali, vincoli sui parametri e risultati della calibrazione.

Parametri	Range Sobol	Vincoli	Par. stimati
θ_1	[0;0.01]	$-0.03 \leq \theta_1 + \theta_2 \leq 0.03$	0.0003
θ_2	[0;0.01]	$-0.03 \leq \theta_1 + \theta_2 \leq 0.03$	0.0078
y_∞	[0;0.04]	-	-0.0112
$\hat{\theta}_2$	[0;0.1]	-	0.0071
k_1	[0;1]	-	0.0302
k_2	[0;1]	-	0.1834
\hat{k}_1	[0;1]	-	0.1356
\hat{k}_2	[0;1]	-	0.0210
σ_1	[0;0.05]	$\sigma_1 \geq 0$	0.0061
σ_2	[0;0.05]	$\sigma_2 \geq 0$	0.0060
ρ	[-1;-0.75]	$-1 \leq \rho \leq 1$	-0.9402
h	0.0005	$h \geq 0$	0.0009

Gli intervalli riportati in Tabella 3 sono stati determinati in modo da concentrare l'algoritmo di ottimizzazione su valori ragionevoli dei parametri iniziali. Ad esempio:

- Gli intervalli di estrazione θ_1 e θ_2 sono stati definiti in modo che l'algoritmo iniziasse la ricerca dell'ottimo a partire da valori compresi tra 0 e 1%. Questa scelta deriva dall'aspettativa che la somma dei due parametri, uguale a $E_t[r(\infty)]$, sia in linea con l'attuale livello dei tassi su scadenze brevi. Il vincolo associato alla somma dei due parametri è stato imposto per ragioni analoghe.
- L'intervallo di valori iniziali di y_∞ è stato individuato al fine di inizializzare l'algoritmo di calibrazione su valori asintotici ragionevoli della struttura delle intensità di rendimento a scadenza.

⁴La sequenza *quasi-random di Sobol* è una sequenza a bassa discrepanza che fa uso di polinomi primitivi. Per ulteriori dettagli sulla generazione dei numeri *quasi-random* si veda Glasserman (2003).

⁵Un'alternativa all'approccio seguito potrebbe essere quella di considerare una griglia equispaziata di parametri iniziali. Tuttavia, questa scelta avrebbe sicuramente dato luogo ad una maggiore discrepanza dell'insieme selezionato a parità di numero di punti iniziali da selezionare, rendendo di conseguenza meno efficace la procedura di ottimizzazione.

- Per ρ è stato scelto un intervallo che favorisse la ricerca del parametro ottimo in un intorno destro di -1, ipotizzando di conseguenza una correlazione fortemente negativa tra i fattori del modello. Tale risultato garantisce infatti la cosiddetta forma *humped* della struttura delle intensità di rendimento a scadenza, come riportato da Brigo e Mercurio (2006).
 - Per h , che rappresenta una stima dello spread bid-ask medio delle $y(t, T)$ sulle diverse scadenze osservate, è stato considerato un unico valore iniziale pari a 5 bps, coerentemente con i valori di questa grandezza osservati empiricamente rispetto alle intensità di rendimento a scadenza derivate dai tassi swap.
3. Ogni procedura di calibrazione ha previsto l'utilizzo dell'algoritmo di ottimizzazione *Nelder-Mead* ed è stata eseguita su un processore Intel i7-4510U 2.00GHz, parallelizzando la procedura sui 4 core della macchina. Il tempo di calcolo è stato di 14 ore, 36 minuti e 2 secondi.
 4. Il risultato finale della procedura di ottimizzazione è stato l'insieme di parametri⁶ corrispondente alla *log-likelihood* maggiore tra tutte quelle ottenute con gli 800 diversi vettori di parametri iniziali.

Nella Tabella 3 sono riportati i risultati della procedura di calibrazione.

Il valore dell'errore di misurazione h riportato in Tabella 3 è pari a 9 punti base, risultando minore di quanto presentato da Babbs e Nowman (2001)⁷ in relazione ad simile esercizio di calibrazioni su dati reali.

Le Figure 2 e 4 riportano le serie storiche delle intensità di rendimento a scadenza (blu) e i corrispondenti valori ottenuti applicando il filtro di Kalman.

Le figure 5, 6, 7 riportano le distribuzioni dei parametri ottenuti dalla procedura di calibrazione per ognuno dei parametri iniziali selezionati. Dagli istogrammi si nota come i parametri selezionati dalla procedura di ottimizzazione si posizionano generalmente sulla moda della distribuzione, dimostrando come l'algoritmo tenda a posizionarsi sulla stima di massima verosimiglianza.

Alcuni parametri (ad es. y_∞ , k_1 , k_2 , \hat{k}_1 e \hat{k}_2) mostrano una distribuzione multimodale dovuta alla presenza di più massimi locali che portano l'algoritmo di calibrazione a selezionare più valori alternativamente. Analizzando nel dettaglio il caso bimodale di y_∞ , è importante notare che in corrispondenza della seconda moda del parametro (circa uguale a 0.4%), la verosimiglianza è minore in misura dello 0.7% del massimo valore ottenuto con l'insieme di parametri riportati in Tabella 3.

Infine, la Tabella 4 mostra i valori medi e le deviazioni standard dei dati reali e delle intensità di rendimento a scadenza stimati attraverso l'applicazione del Kalman Filter sulla base dei parametri calibrati. I risultati riportati mostrano una buona riproduzione delle caratteristiche statistiche dei dati.

Per quanto riguarda l'interpretazione dei parametri, la struttura del modello di Vasicek a due fattori non consente agevolmente di dare un significato a θ_1 , θ_2 , k_1 e k_2 , diversamente da quanto è possibile per il corrispondente modello univariato. Tuttavia, è possibile valutare la ragionevolezza dei parametri ottenuti sulla base dei valori ottenuti per $E_t[r(\infty)]$ e y_∞ .

⁶Ai fini di una più diretta interpretazione dei parametri, il modello è stato riformulato in modo da calibrare direttamente y_∞ in sostituzione di $\hat{\theta}_1$.

⁷Il modello implementato da Babbs prevede 8 errori di misurazione, uno per ogni scadenza prevista. I valori risultanti dall'esercizio di calibrazione sono compresi tra 1 e 28 punti base.

Tabella 4: Confronto tra la media e la deviazione standard delle intensità di rendimento a scadenza di mercato e dei dati stimati dal filtro di Kalman sulla base dei parametri calibrati. I valori riportati sono espressi in punti base.

$y(t, T)$ (bps)	Media Mkt	Dev std Mkt	Media Modello	Dev std Modello
$T = 1$	27	36	15	36
$T = 2$	31	36	33	39
$T = 3$	40	40	49	41
$T = 5$	67	50	77	46
$T = 10$	134	61	128	56
$T = 15$	170	64	160	62
$T = 20$	183	63	179	64
$T = 25$	187	62	190	66
$T = 30$	187	61	195	65
$T = 40$	190	62	194	63
$T = 50$	190	63	184	60

Per quanto riguarda $E_t[r(\infty)]$, ricaviamo un valore di 0.8% dato dalla somma di θ_1 e θ_2 . Tale risultato molto vicino allo 0 è in linea con il livello dei tassi di interesse su brevissime scadenze osservato negli ultimi anni.

In relazione a y_∞ , si è ottenuto un valore negativo pari a -1.1%. Tale valore è coerente con l'osservazione del trend decrescente della struttura dei tassi di interesse che è stato osservato negli ultimi anni su scadenze lunghe (superiori a 30 anni). Il modello pertanto riproduce molto bene i dati a disposizione, ma estrapola la struttura (oltre l'ultima scadenza osservata di 50 anni) verso un valore asintotico negativo. Occorre comunque sottolineare che la struttura diventa negativa in prossimità della scadenza 200 anni e che mantiene valori ragionevoli fino ai 100 anni. Un'analisi di sensitività del valore di y_∞ al variare della profondità della serie storica dei dati di mercato dovrebbe consentire di comprendere meglio la capacità del modello di ottenere valori asintotici ragionevoli da un punto di vista economico. Lo studio potrebbe confermare la necessità dell'inclusione di un vincolo esogeno per y_∞ .

La Figura 8 confronta la struttura delle intensità di rendimento a scadenza al 31/12/2016 ottenuta con i parametri calibrati, la struttura risk-free dell'⁸ e i dati osservati. Si nota un buon fitting del modello rispetto ai dati osservati e la tendenza decrescente dei tassi osservati dai 30 anni in poi. La struttura EIOPA domina la struttura calibrata a partire dai 20 anni di scadenza, in linea con quanto previsto dalla normativa Solvency 2, che impone un'estrapolazione degli Euro swap osservati fino alla scadenza 20 anni con il vincolo previsto dall'Autorità che prevede valori asintotici pari al 4.1% (cd. *Ultimate Forward rate*).

4.1 Calcolo del SCR di zcb su diverse scadenze

Per la verifica della ragionevolezza dei parametri stimati nel paragrafo 4, il modello calibrato sui dati di mercato è stato utilizzato al fine di determinare il *Solvency Capital Requirement*⁹ (SCR) in ottica

⁸European Insurance and Occupational Pensions Authority.

⁹Il SCR relativo ad ogni zcb è stato determinato come la differenza tra il valore a rischio del titolo ad un livello di probabilità 99.5 percento su un orizzonte temporale di un anno e il suo valore di mercato ad un anno dalla data di

Solvency 2 associato a zcb valutati al 31 dicembre 2016 con durata residua a scadenza da 1 a 100 anni. La Figura 9 fornisce il confronto tra il SCR calcolato in ottica di *modello interno*, come VaR della distribuzione del prezzo dei titoli ad 1 anno sulla base del nostro modello, e in base alla *formula standard*, metodo di calcolo basato sull'applicazione di parametri di shock standardizzati calibrati su dati di mercato. La data di valutazione è il 31/12/2016.

La Figura 9 mostra che il valore relativo del requisito patrimoniale ottenuto come VaR è molto simile a quello della formula standard fino alla scadenza 30 anni, per poi decrescere più velocemente dei valori ottenuti sulla base dei parametri standard. I risultati ottenuti confermano la ragionevolezza dei parametri ottenuti con l'algoritmo di calibrazione.

5 Validazione dell'algoritmo di calibrazione

In questa sezione vengono riportate le seguenti procedure di validazione della tecnica di calibrazione presentata nella sezione 4. In particolare sono stati eseguiti i seguenti due test:

1. Partendo dalla simulazione di 1000 insiemi di dati a partire da parametri fissati esogenamente uguali a quelli risultanti dalla calibrazione sui dati di mercato è stata effettuata una calibrazione del modello a partire da parametri iniziali selezionati in un intorno dei parametri veri.
2. Partendo dalla simulazione di 1 insieme di dati equivalenti a quelli utilizzati nel test precedente è stata effettuata una calibrazione del modello a partire da 800 parametri iniziali generati da sequenze quasi-random di Sobol.

5.1 Calibrazione su dati simulati

Sono qui riportati i risultati della calibrazione del modello relativi ad un insieme di dati simulati con il metodo *Monte Carlo* a partire dagli stessi parametri iniziali fissati esogenamente uguali a quelli calibrati nella sezione precedente. L'esercizio simulativo ha avuto l'obiettivo di verificare l'efficacia della tecnica di calibrazione ad identificare i parametri che hanno generato i dati simulati, partendo da parametri iniziali selezionati in un intorno dei parametri veri. L'esercizio di simulazione, effettuato attraverso l'uso dell'applicativo R, può essere riassunto come segue:

1. Sono state simulate 1000 traiettorie delle variabili di stato attraverso la discretizzazione con passo giornaliero dell'equazione (1). La simulazione è stata effettuata per 5 anni di proiezione ed assumendo che ogni anno sia composto da 260 giorni lavorativi.
2. Per ognuna delle 1000 traiettorie delle variabili di stato simulate sono state calcolate le intensità di rendimento a scadenza relative alle scadenze 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40 e 50 anni, per ogni passo della simulazione, sulla base delle equazioni (8) e (3.2).
3. Per ogni insieme di dati simulati è stata lanciata una procedura di ottimizzazione finalizzata alla stima dei parametri del modello per ognuno degli insiemi di dati simulati. Le procedure di ottimizzazione, basate sulla massimizzazione della *log-likelihood* del *Kalman filter*, sono state eseguite utilizzando l'algoritmo di ottimizzazione *Nelder-Mead*.

valutazione; tale differenza è stata poi attualizzata in base ai tassi privi di rischio ottenuti dal modello.

4. I parametri iniziali forniti in input all'algoritmo di ottimizzazione sono stati estratti casualmente in ognuna delle 1000 iterazioni dell'algoritmo. In particolare, sono stati simulati a partire da una variabile casuale normale con media il parametro vero e deviazione standard pari al 5%.
5. L'algoritmo è stato eseguito su un processore Intel i7-4510U 2.00GHz, parallelizzando la procedura sui 4 *core* della macchina. Il tempo di calcolo è stato di 2 ore, 28 minuti e 18 secondi.

I risultati dell'esercizio sono riportati nella Tabella 5.

Tabella 5: Risultati della calibrazione sui dati simulati: la Tabella riporta i parametri prefissati nell'algoritmo di simulazione, i parametri stimati dalla procedura di ottimizzazione, la deviazione standard della stima dei parametri e l'errore standard ad essi associato.

Parametri	Parametri Veri	Par medi	Std Dev Par	Standard Error
θ_1	0.0003	0.0009	0.0184	-0.0301
θ_2	0.0078	0.0082	0.0195	-0.0162
y_∞	-0.0112	-0.0125	0.0051	0.2672
$\hat{\theta}_2$	0.00716	0.0078	0.0207	-0.0297
k_1	0.03016	0.5191	0.5148	-0.9497
k_2	0.18342	0.7686	0.4995	-1.1716
\hat{k}_1	0.1356	0.1369	0.0072	-0.1711
\hat{k}_2	0.0210	0.0206	0.0020	0.1908
σ_1	0.0061	0.0061	0.0004	0.1659
σ_2	0.0060	0.0060	0.0003	0.1577
ρ	-0.9402	-0.9374	0.0153	-0.1806
h	0.00092	0.0009	0.0001	0.0618
$E_t[r(\infty)]$	0.0081	0.0900	0.0077	-0.1131

L'errore standard se_i , relativo all' i -esimo parametro, riportato nella Tabella 5 è stato determinato come segue:

$$se_i = \frac{p_i^* - p_i}{sd_i}$$

dove p_i^* , sd_i e p_i rappresentano rispettivamente l' i -esimo parametro stimato, la deviazione standard ad esso relativa e l' i -esimo parametro prefissato nell'algoritmo di simulazione.

Sulla base dei risultati riportati nella Tabella 5 si può concludere che la tecnica di calibrazione risulta adeguata per la stima dei parametri del modello. Tutti gli errori standard sono generalmente inferiori ad 1 e mai superiori a 1.2, dimostrando che l'errore di stima è generalmente inferiore all'errore statistico dovuto alla non sufficiente numerosità del campione.

Buoni risultati sono stati ottenuti per tutti i parametri rischio neutrali, $\hat{\theta}_1$, y_∞ , \hat{k}_1 e \hat{k}_2 , in linea con i risultati riportati da Babbs e Nowman (2001) e Bolder (2001). Le Figure 10 e 11 confermano tale risultato.

Le volatilità σ_1 e σ_2 presentano un errore standard contenuto e una stima molto vicina a quella del parametro prefissato.

Per quanto riguarda i parametri naturali, mentre θ_1 e θ_2 presentano un errore contenuto e una distribuzione abbastanza concentrata intorno alla media (vedi Figura 10), k_1 e k_2 mostrano un errore superiore ad una deviazione standard ed una pesante coda a destra nella distribuzione riportata in Figura 11. Per questi ultimi parametri è stata ottenuta la stima maggiormente distorta.

Il parametro di correlazione ρ e l'errore di misura h risultano ben identificati seppur con una distribuzione non perfettamente simmetrica, come mostrato dalla Figura 12.

Infine, un'ottima stima è stata ottenuta per $E_t[r(\infty)]$, come riportato nella Tabella 5.

Le Figure 13, 14 e 15 riportano i QQ plot delle distribuzioni dei parametri. Dalla loro analisi si evince che l'ipotesi di normalità spesso non è rispettata a causa dell'asimmetria e della coda pesante delle distribuzioni.

5.2 Calibrazione a partire da parametri iniziali *quasi-random*

Sono qui riportati i risultati della calibrazione del modello relativi ad un insieme di dati simulati attraverso il metodo *Monte Carlo* a partire da 800 parametri iniziali generati con la sequenza *quasi-random* di Sobol. L'esercizio simulativo ha avuto l'obiettivo di verificare l'efficacia della tecnica di calibrazione ad identificare i parametri che hanno generato i dati partendo da parametri iniziali selezionati analogamente a quanto effettuato nel paragrafo 4.

L'esercizio di calibrazione, effettuato attraverso l'uso dell'applicativo R, può essere riassunto come segue:

1. Un insieme di dati è stato simulato attraverso la discretizzazione con passo giornaliero dell'equazione (1). La simulazione è stata effettuata per 5 anni di proiezione ed assumendo che ogni anno sia composto da 260 giorni lavorativi.
2. Per ogni traiettoria delle variabili di stato sono state calcolate le intensità di rendimento a scadenza relative alle scadenze 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40 e 50 anni, per ogni passo della simulazione, sulla base delle equazioni (8) e (3.2).
3. Sono state utilizzate 800 procedure di ottimizzazione ognuna a partire da un diverso insieme di parametri iniziali. Ogni vettore dei parametri iniziali è stato opportunamente selezionato utilizzando sequenze *quasi-random di Sobol* definite sugli intervalli riportati nella Tabella 3.
4. Ogni procedura di calibrazione ha previsto l'utilizzo dell'algoritmo di ottimizzazione *Nelder-Mead* ed è stata eseguita su un processore Intel i7-4510U 2.00GHz, parallelizzando la procedura sui 4 *core* della macchina. Il tempo di calcolo è stato di 10 ore, 25 minuti e 18 secondi.
5. Il risultato finale della procedura di ottimizzazione è stato l'insieme di parametri corrispondente alla *log-likelihood* maggiore tra tutte quelle ottenute con gli 800 diversi vettori di parametri iniziali.

I risultati dell'esercizio sono riportati nella Tabella 6.

I risultati sono allineati con l'esercizio svolto nel paragrafo 5.1. I parametri rischio neutrali e σ_1 e σ_2 presentano valori molto vicini a quelli prefissati inizialmente. Conseguentemente, anche il valore di y_∞ è stato stimato in modo molto preciso. La distribuzione di y_∞ riportata nella figura 16 è bimodale come quella riportata in figura 5. Anche in questo caso, come nel caso della calibrazione sui dati di mercato, il valore della verosimiglianza corrispondente all'insieme dei parametri relativi alla seconda

Tabella 6: Risultati della calibrazione su 1 insieme di dati simulati a partire da 800 insiemi di parametri iniziali: la tabella riporta i parametri prefissati nell’algoritmo di simulazione e i parametri stimati dalla procedura di ottimizzazione

Parametri	Par vero	Par stima
θ_1	0.0003	0.0166
θ_2	0.0078	-0.0082
R_∞	-0.0112	-0.01210
$\hat{\theta}_2$	0.0071	0.0106
k_1	0.0302	1.4955
k_2	0.1834	1.0549
\hat{k}_1	0.1356	0.1345
\hat{k}_2	0.0210	0.0211
σ_1	0.0061	0.0064
σ_2	0.0060	0.0062
ρ	-0.9402	-0.9566
h	0.0009	0.0009
$E_t[r(\infty)]$	0.0081	0.0083

moda della distribuzione di y_∞ (pari circa a 0.002%) è molto simile a quello ottenuto con l’insieme dei parametri ottimi, presentando uno scostamento inferiore allo 0.1%.

Per quanto riguarda i parametri naturali, se $E_t[r(\infty)]$ presenta un valore molto vicino a quello vero, mentre per k_1 e k_2 l’algoritmo di calibrazione sembrerebbe molto sensibile ai parametri iniziali. Tuttavia, è importante notare che la differenza tra la funzione di verosimiglianza calcolata con i parametri veri e con i parametri stimati è inferiore allo 0.1%. Potenziali problematiche di identificabilità di questi parametri andrebbero analizzate attraverso lo studio del profilo della verosimiglianza in relazione ai parametri stessi.

Le Figure 16, 17, 18 mostrano coerentemente distribuzioni molto concentrate nel caso dei parametri rischio neutrali e più ampie per i parametri naturali.

6 Conclusioni

Le analisi effettuate dimostrano che il modello riproduce in modo soddisfacente i dati di mercato utilizzati per la calibrazione (*in sample*) e proietta *out of sample* in modo simile a quanto prevede la Formula Standard.

Dal punto di vista del test relativo alla presenza di distorsione nella procedura di ottimizzazione, con l’eccezione di k_1 e k_2 che saranno l’oggetto di futuri approfondimenti, la metodologia di calibrazione, partendo da un intorno dei parametri corretti, fornisce in output i parametri di partenza con un margine di errore statisticamente coerente. Questo test ha avuto il duplice obiettivo di studiare l’assenza di distorsione della stima e di confermare la stabilità della calibrazione nel caso di un aggiornamento del campione dei dati di mercato utilizzati.

Il risultato precedente è confermato anche dal secondo test di validazione che dimostra l'assenza di una marcata dipendenza del risultato della calibrazione dal set di parametri iniziali, nonostante la presenza di minimi locali.

Un ulteriore risultato riguarda la capacità del modello di desumere il livello asintotico della struttura dei tassi a partire dal dataset considerato. Il valore ottenuto per y_∞ pari a -1.1% è in accordo con il comportamento empirico delle intensità di rendimento a scadenza considerate nel campione, ma risulta insoddisfacente da un punto di vista economico e richiede, di conseguenza, l'introduzione di un vincolo esogeno. Questa tematica, rientrando nel tema più generale dell'estrapolazione della struttura delle intensità di rendimento a scadenza, verrà approfondita in lavori di ricerca futuri.

In conclusione, i risultati ottenuti attraverso la calibrazione sui dati storici risultano adeguati sia sulla base dei ragionamenti qualitativi relativi all'interpretazione dei valori di $E_t[r(\infty)]$ e y_∞ che analizzando i risultati dei due test di validazione.

Riferimenti bibliografici

- Andrews A.; Grewal M. (2001). *Kalman Filtering: Theory and Practice*. J. Wiley and Sons.
- Babbs S. H.; Nowman K. B. (2001). Kalman filtering of generalized vasicek term structure models. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **34**.
- Bolder D. (2001). Affine term-structure models: Theory and implementation. *Bank of Canada Paper 2001-15*.
- Brigo D.; Mercurio F. (2006). *Interest Rate Models: Theory and Practice - With Smile, Inflation and Credit, 2nd Edition*. Springer.
- Chen R.; Scott L. (2003). Multi-factor cox-ingersoll-ross models of the term structure: Estimates and tests from a kalman filter model. *Journal of Real Estate Finance and Economics*, **27**.
- Duffee G. (2002). Term premia and interest rate forecasts in affine models. *The Journal of Finance*, **57**.
- Durbin J.; Koopman S. J. (2012). *Time Series Analysis by State Space Methods*. Oxford University Press.
- Glasserman P. (2003). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer.
- Nelder J.; Mead R. (1965). A simplex method for function minimization. *Comput. J.*, **7**.
- Parlamento Europeo e Consiglio dell'Unione Europea (2009). Direttiva 138/2009. *Gazzetta Ufficiale dell'Unione Europea*.

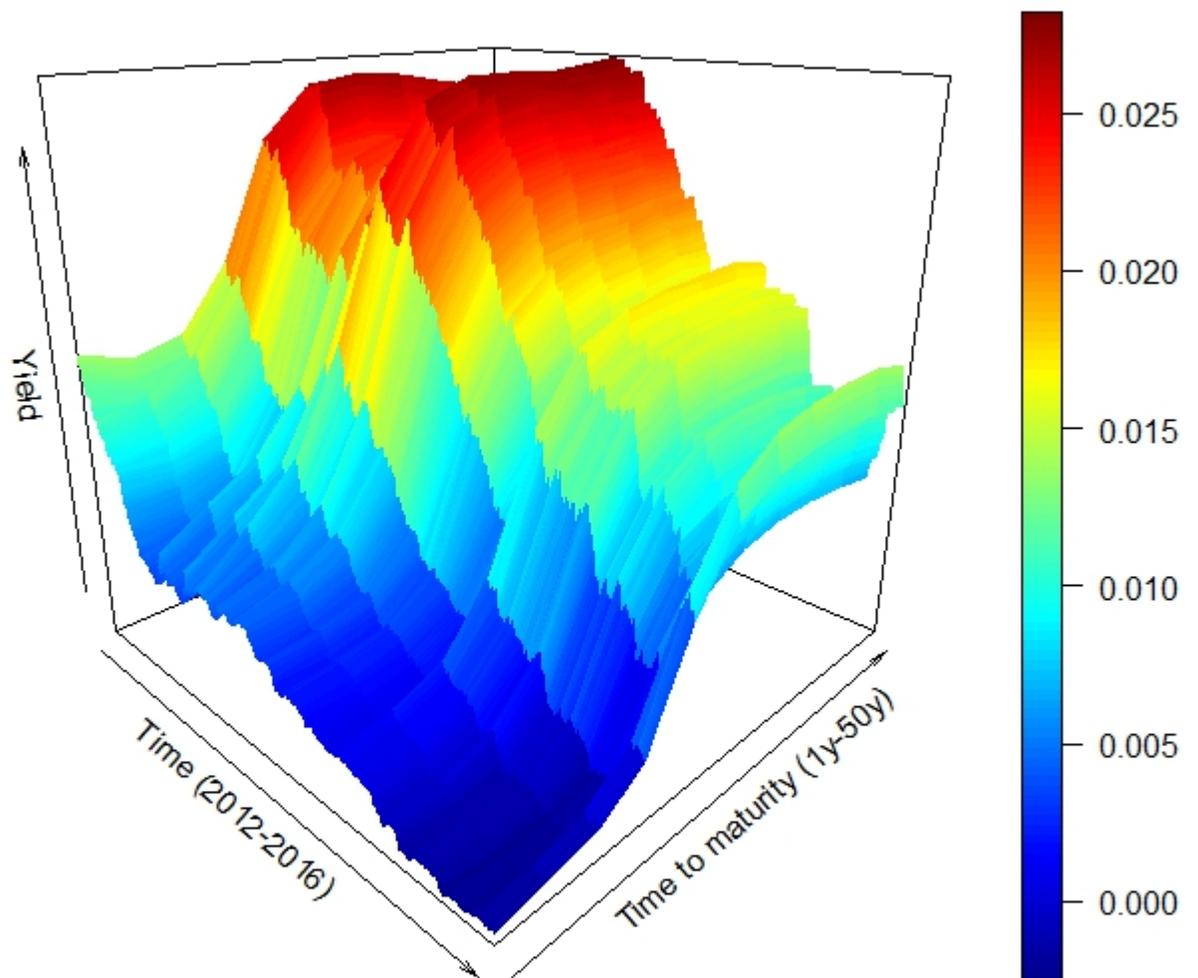


Figura 1: Intensità di rendimento a scadenza ottenute a partire dagli Euro swap osservati giornalmente dal 1 Gennaio 2012 al 31 dicembre 2016

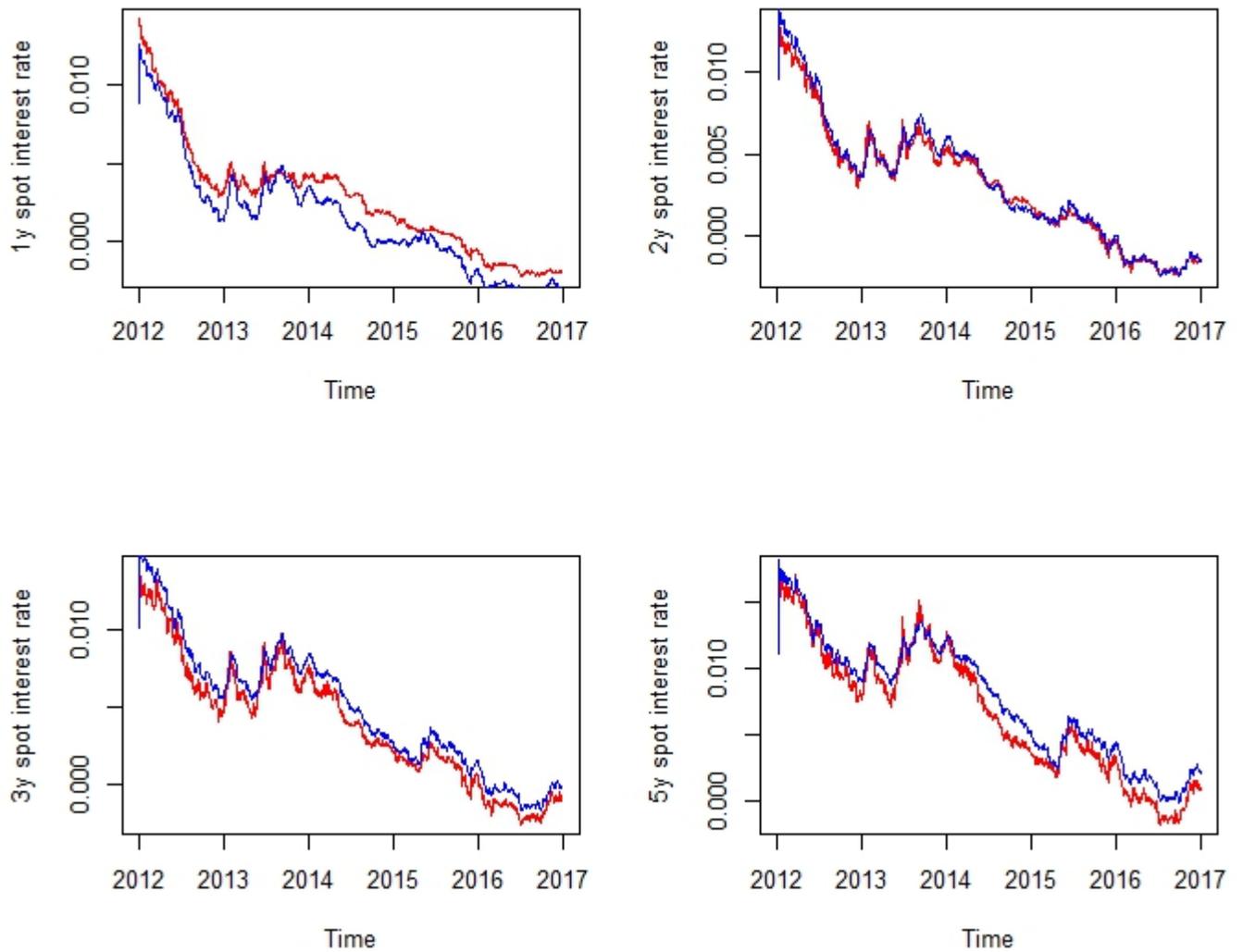


Figura 2: Applicazione del Kalman filter (blu) alle intensità di rendimento a scadenza ricavate dagli Euro swap a 1, 2, 3, 5, osservati giornalmente dal 2012 al 2016 (rosso).

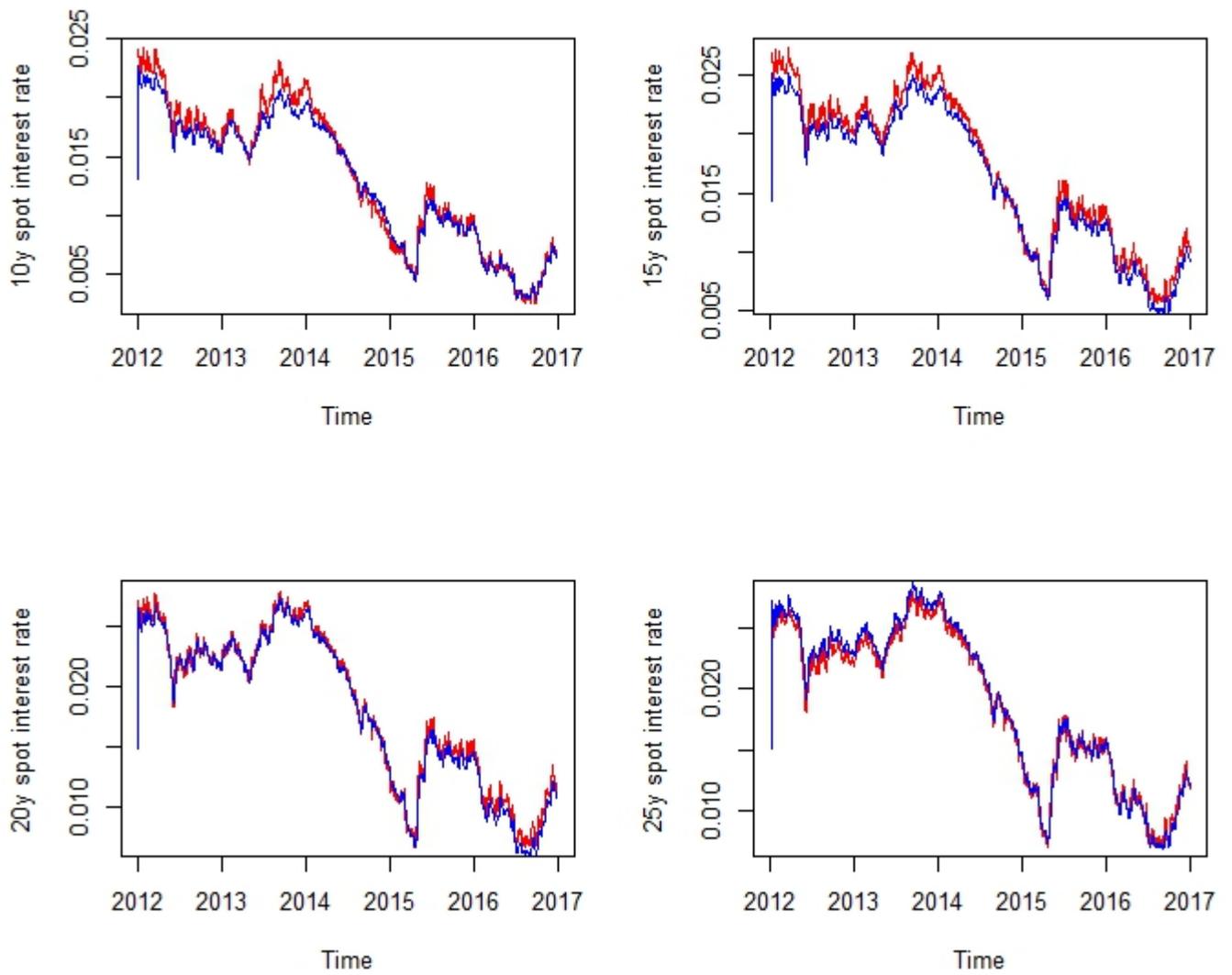


Figura 3: Applicazione del Kalman filter (blu) alle intensità di rendimento a scadenza ricavate dagli Euro swap a 10, 15, 20, 25 osservati giornalmente dal 2012 al 2016 (rosso).

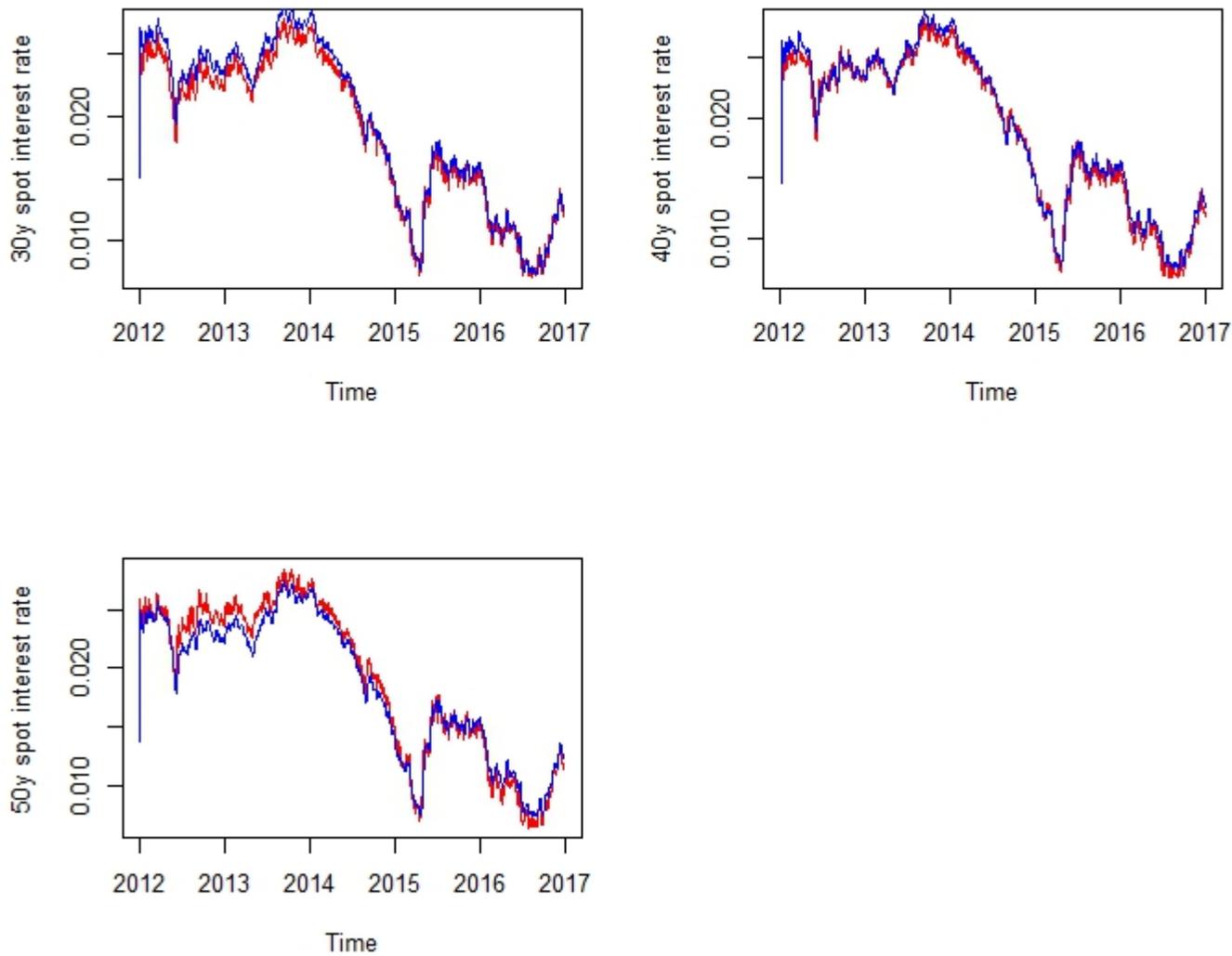


Figura 4: Applicazione del Kalman filter (blu) alle intensità di rendimento a scadenza ricavate dagli Euro swap a 30, 40, 50 osservati giornalmente dal 2012 al 2016 (rosso).

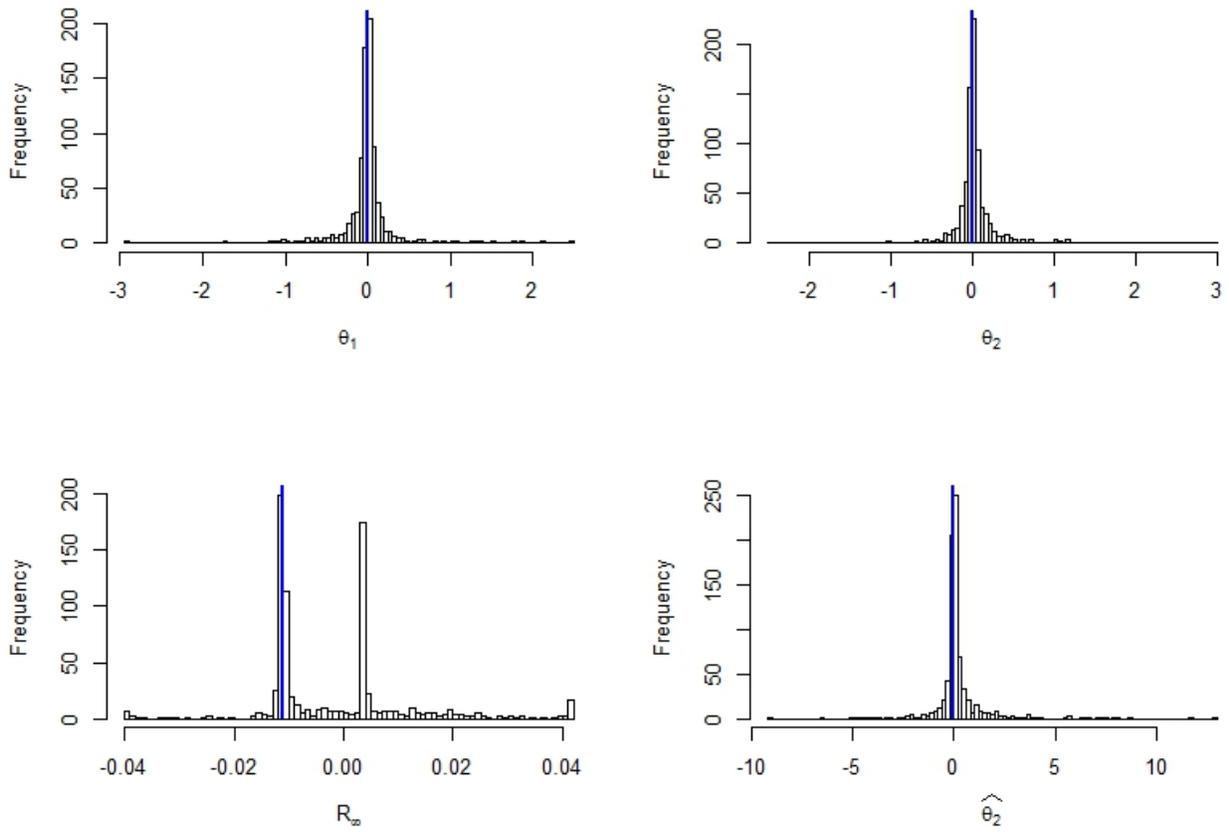


Figura 5: Distribuzione dei parametri ottenuti dalla procedura di calibrazione sui dati reali partendo da diversi insiemi di parametri iniziali generati attraverso la sequenza quasi-random di Sobol. La linea blu indica la stima di massima verosimiglianza dei parametri

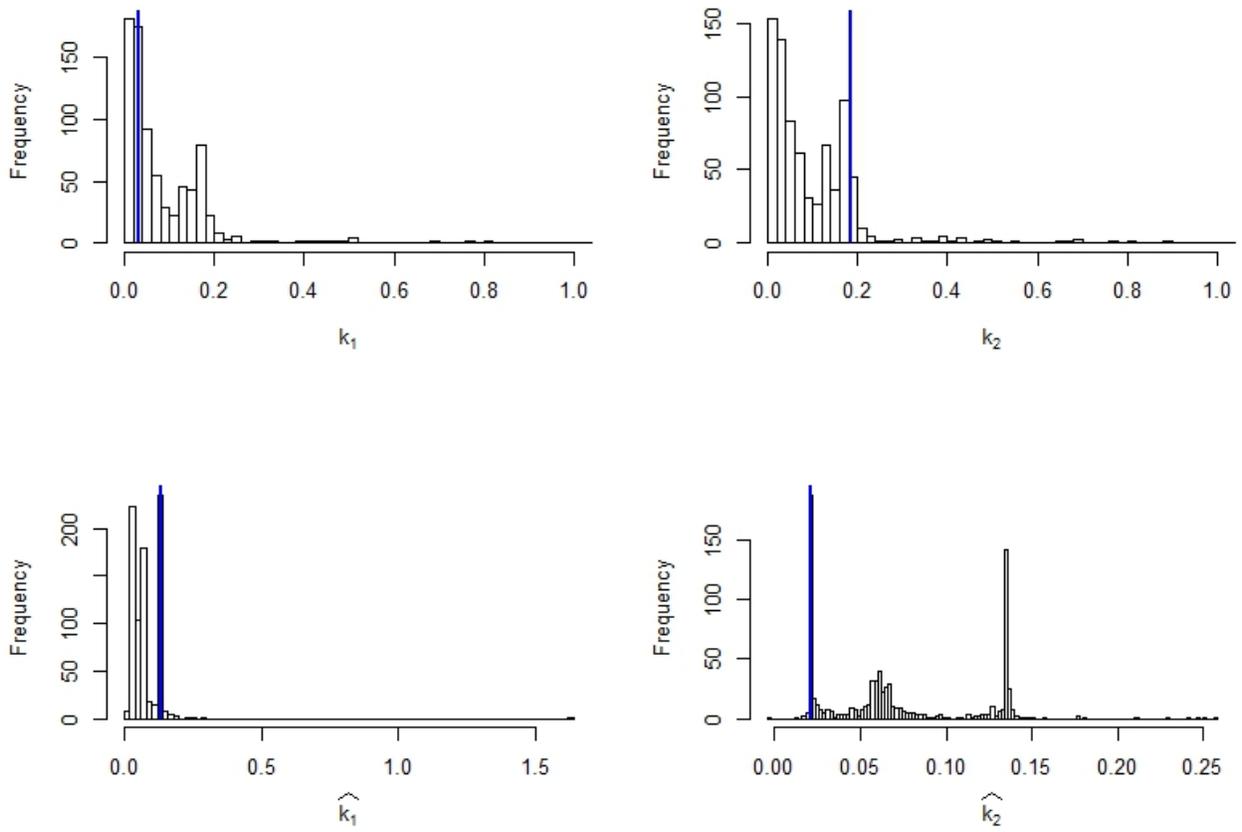


Figura 6: Distribuzione dei parametri ottenuti dalla procedura di calibrazione sui dati reali partendo da diversi insiemi di parametri iniziali generati attraverso la sequenza quasi-random di Sobol. La linea blu indica la stima di massima verosimiglianza dei parametri

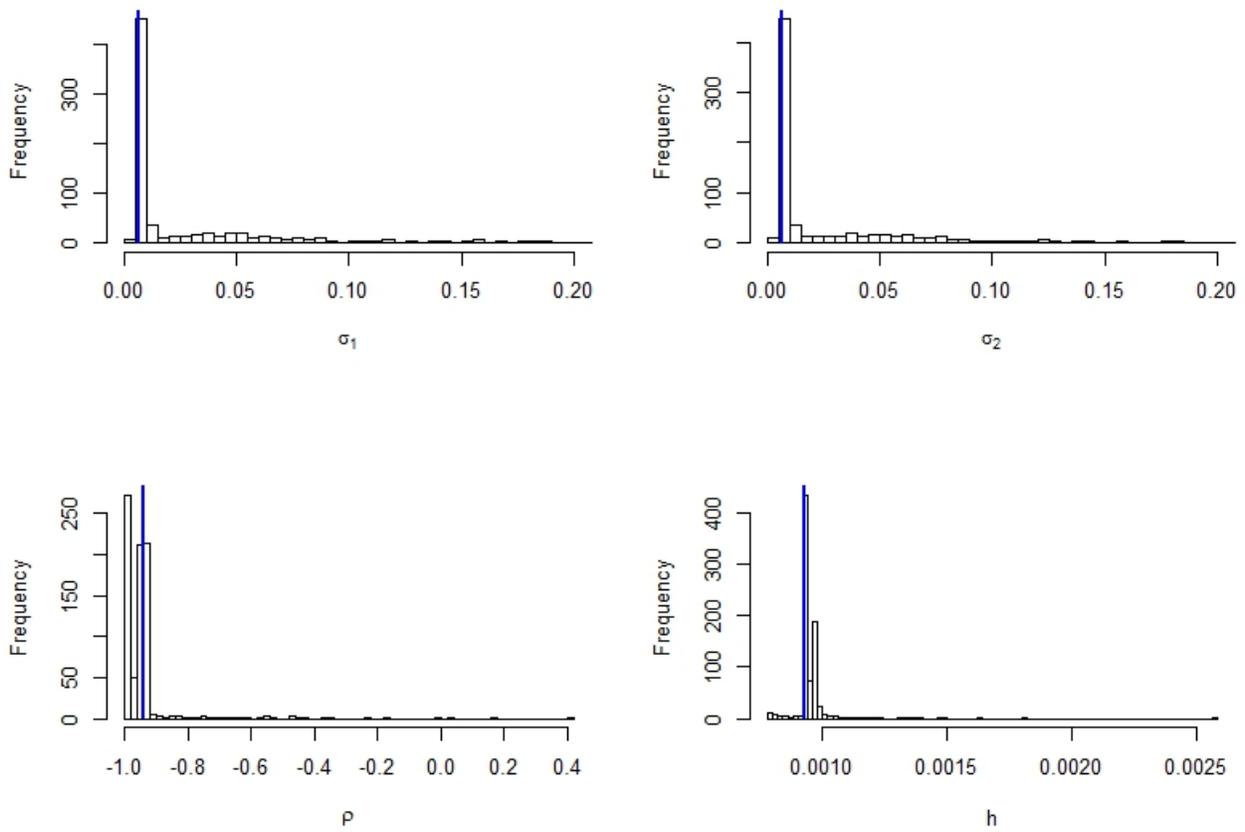


Figura 7: Distribuzione dei parametri ottenuti dalla procedura di calibrazione sui dati reali partendo da diversi insiemi di parametri iniziali generati attraverso la sequenza quasi-random di Sobol. La linea blu indica la stima di massima verosimiglianza dei parametri

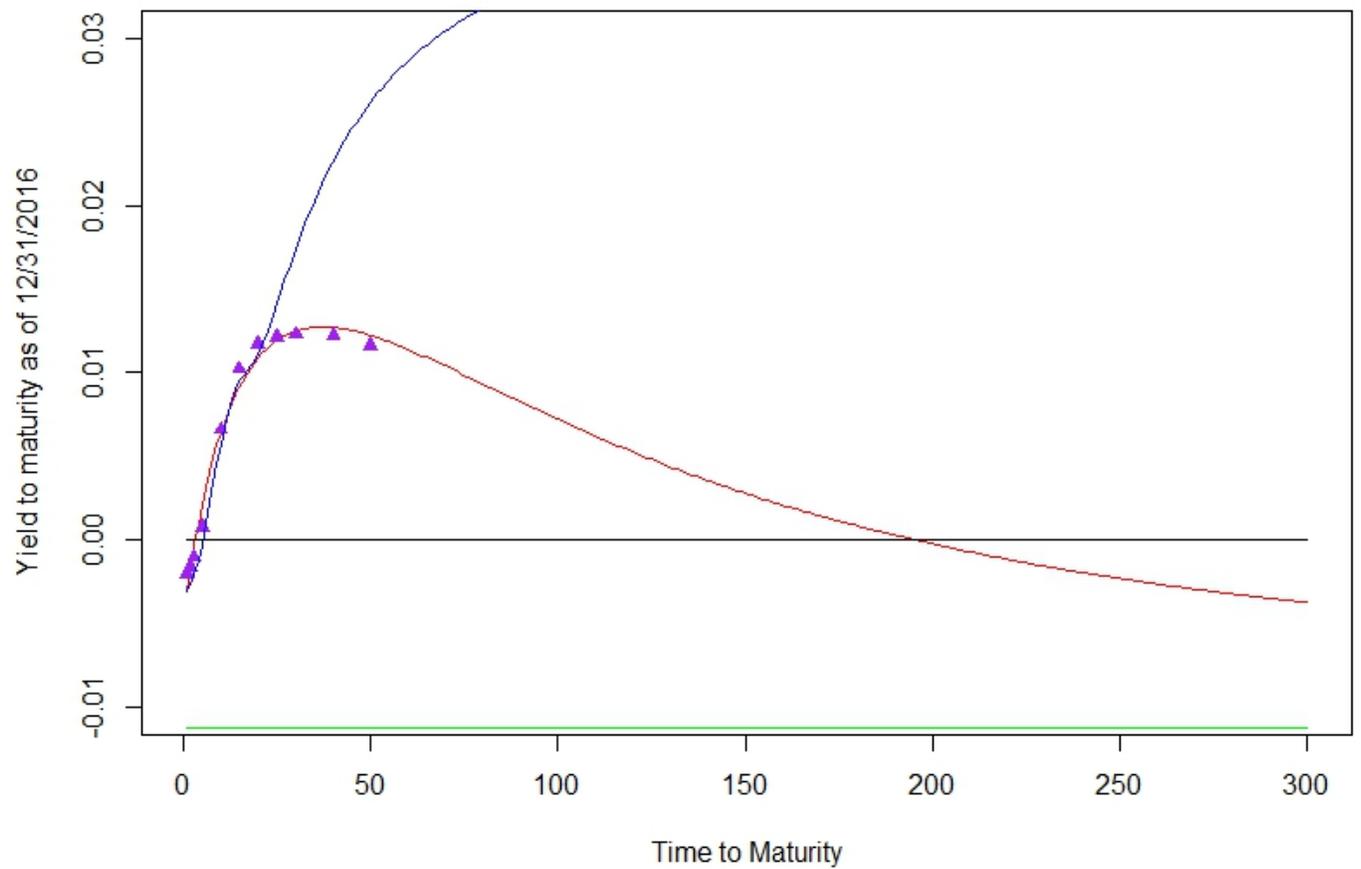


Figura 8: Strutture delle intensità di rendimento a scadenza al 31/12/2016: Struttura risk-free EIOPA (blu), struttura ottenuta sulla base dei parametri calibrati, dati osservati (triangoli viola) e livello asintotico di y_∞ (verde)

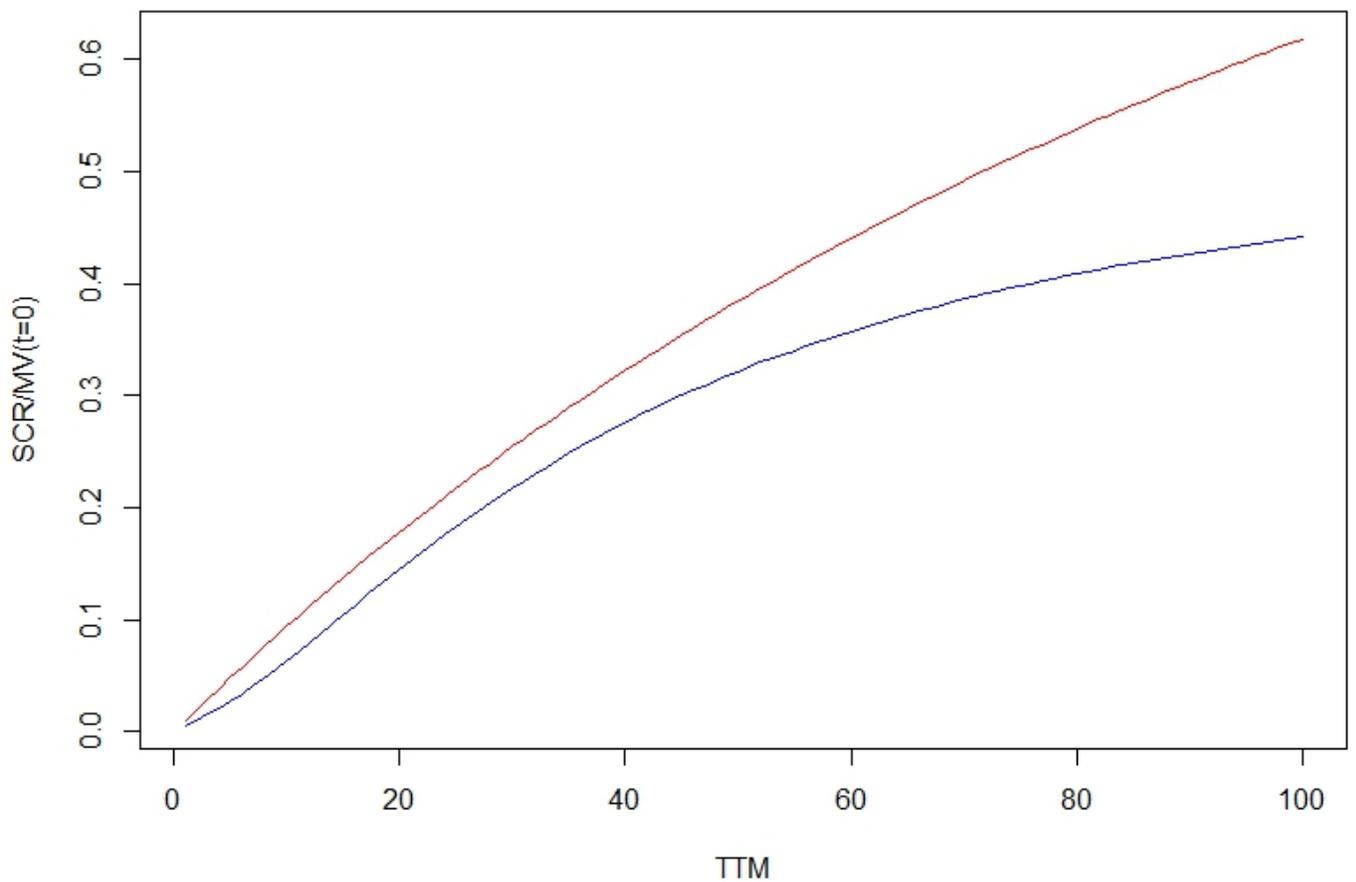


Figura 9: Confronto tra il SCR calcolato secondo il modello calibrato nel paragrafo 4 (blu) e la formula standard (rosso) relativamente a zcb con scadenza da 1 a 100 anni. Sulle ordinate sono riportati i rapporti del SCR ottenuto secondo i due approcci e il valore di mercato del titolo

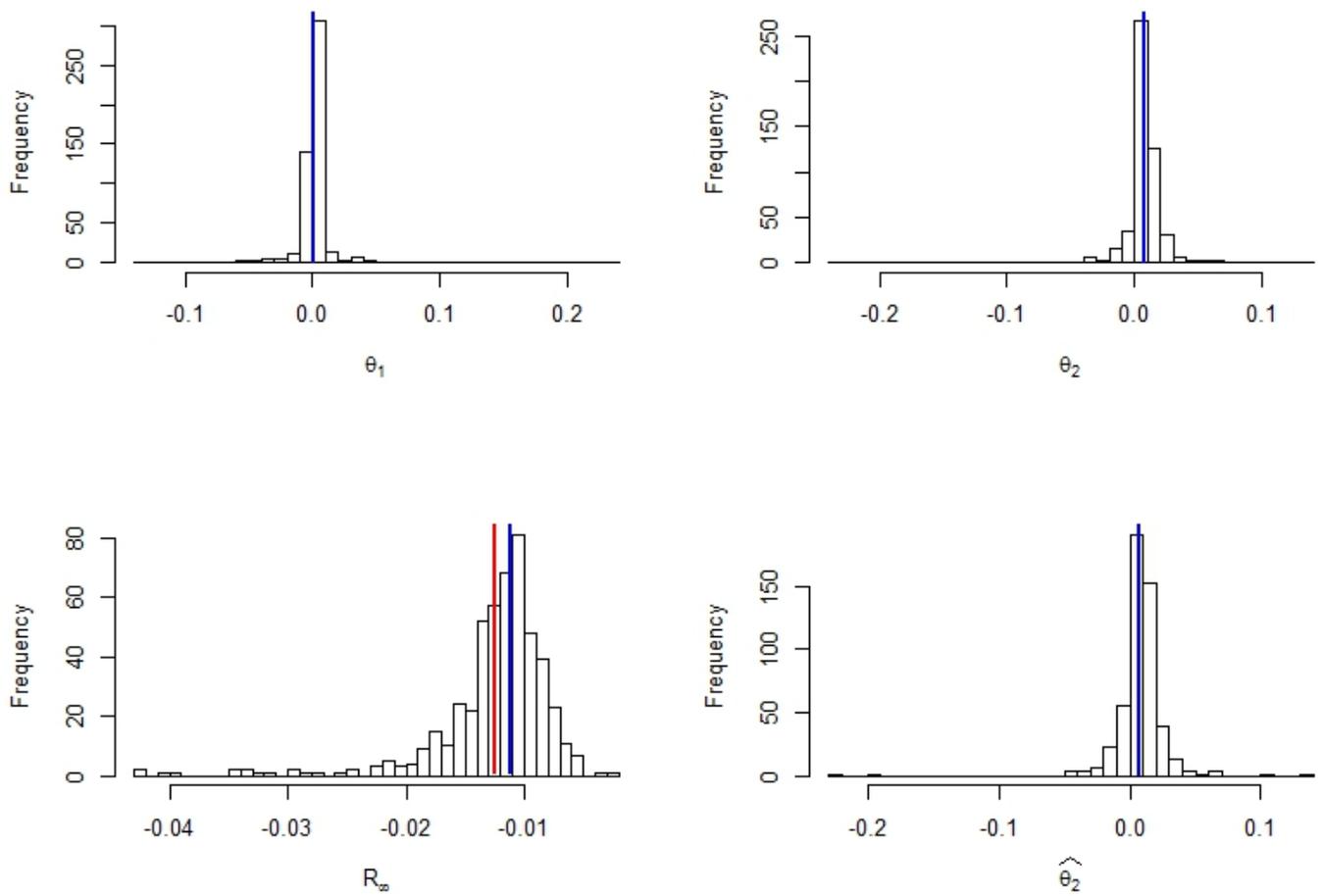


Figura 10: Distribuzione dei parametri risultante dalle calibrazioni effettuate sui dati simulati. La linea blu indica il parametro vero mentre la linea rossa la media della distribuzione.

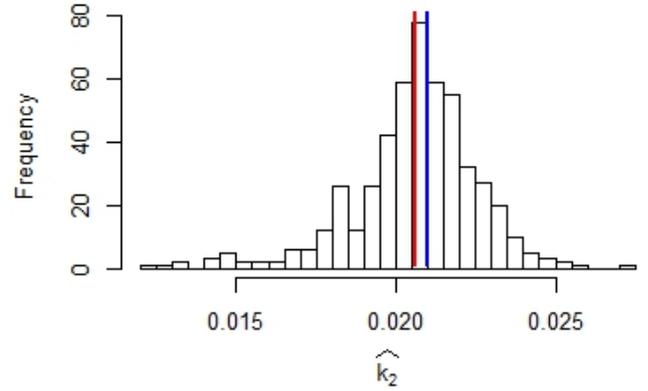
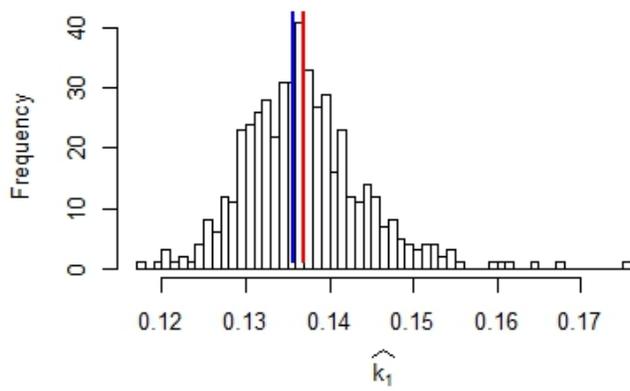
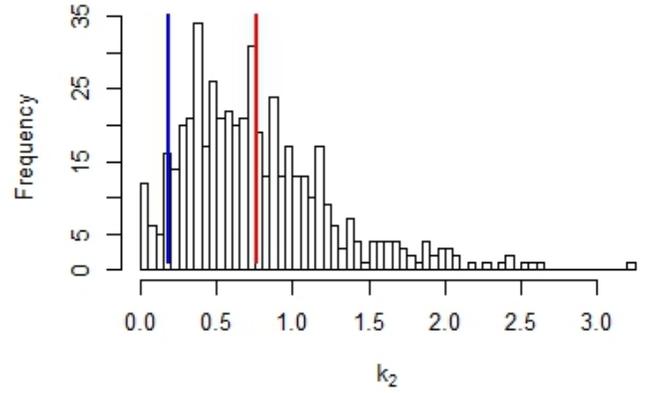
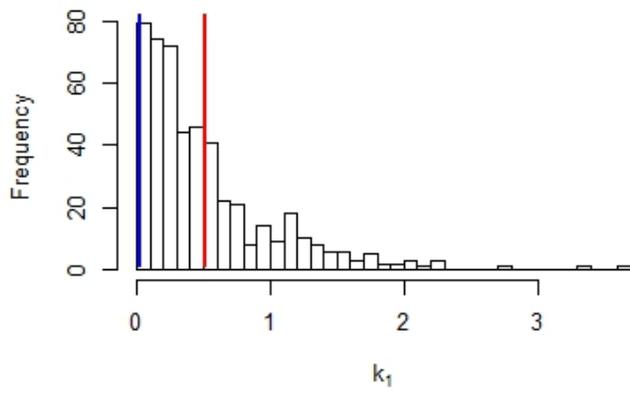


Figura 11: Distribuzione dei parametri risultante dalle calibrazioni effettuate sui dati simulati. La linea blu indica il parametro vero mentre la linea rossa la media della distribuzione.

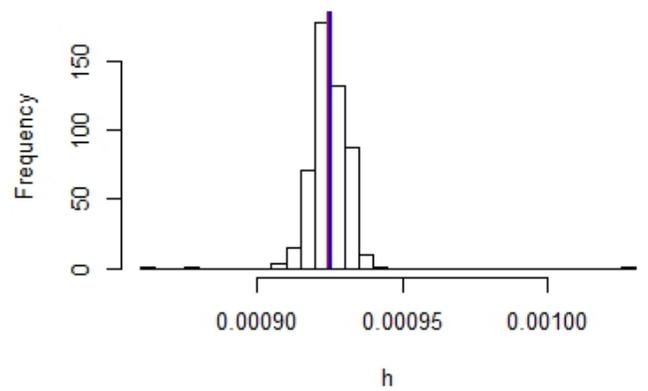
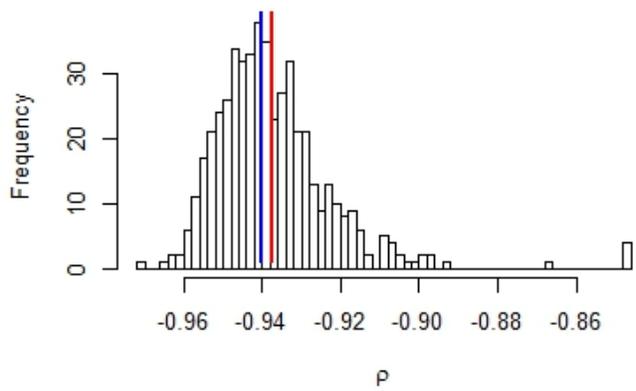
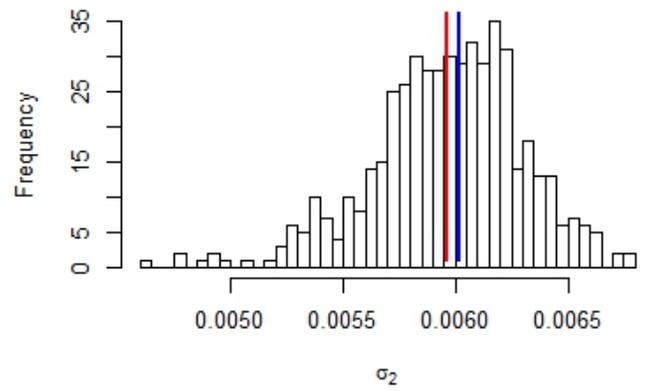
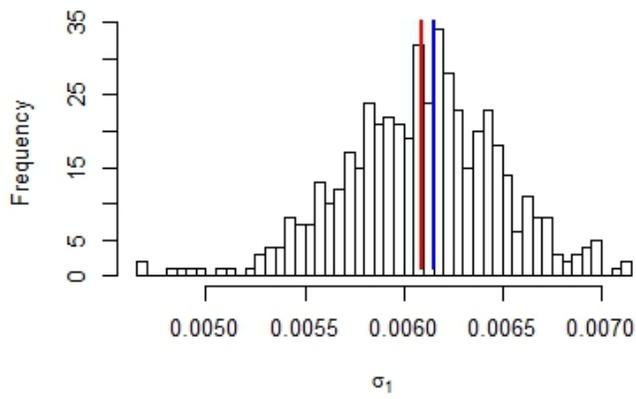


Figura 12: Distribuzione dei parametri risultante dalle calibrazioni effettuate sui dati simulati. La linea blu indica il parametro vero mentre la linea rossa la media della distribuzione.

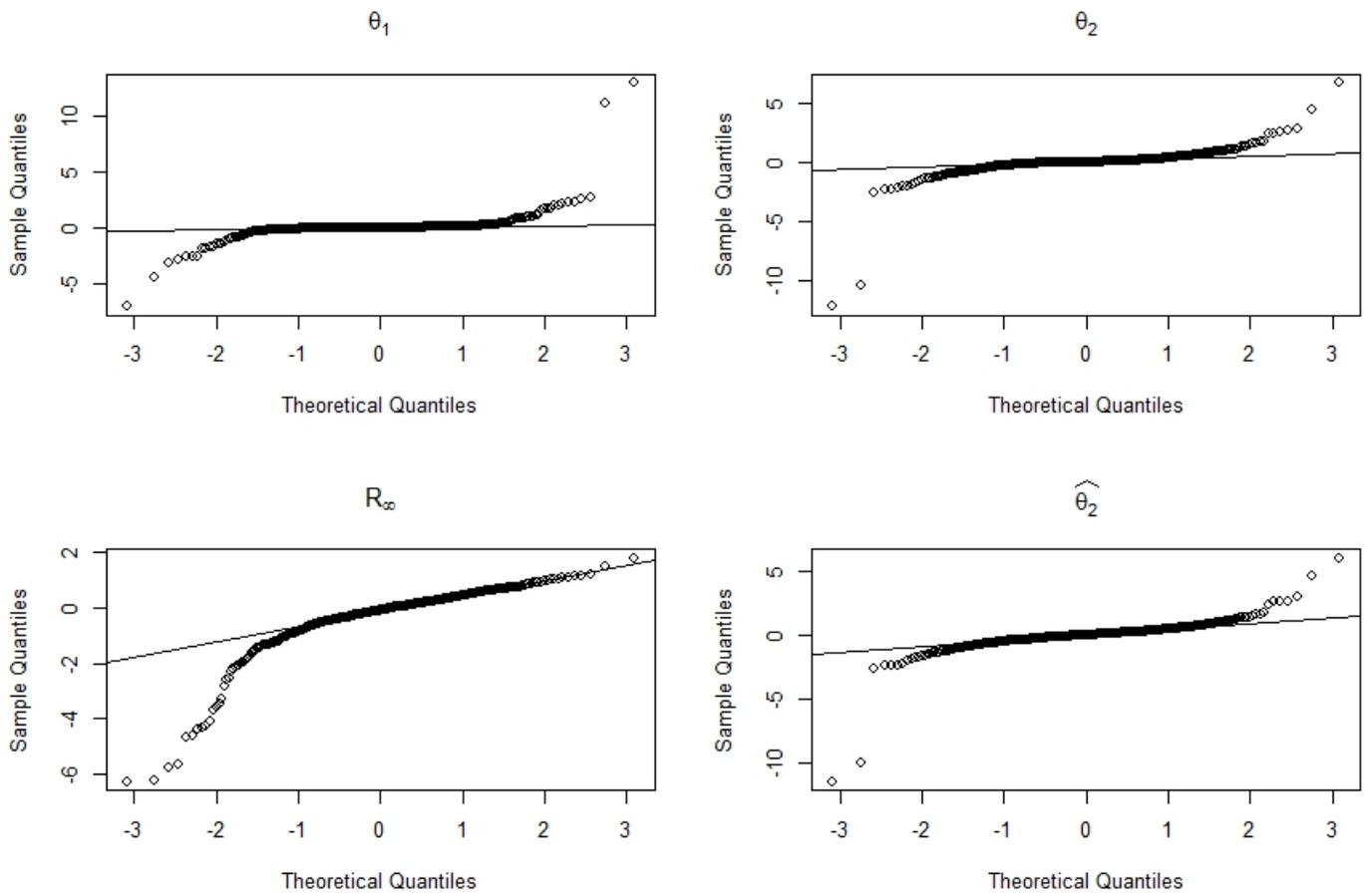


Figura 13: QQ plot della distribuzione dei parametri risultante dalle calibrazioni effettuate sui dati simulati

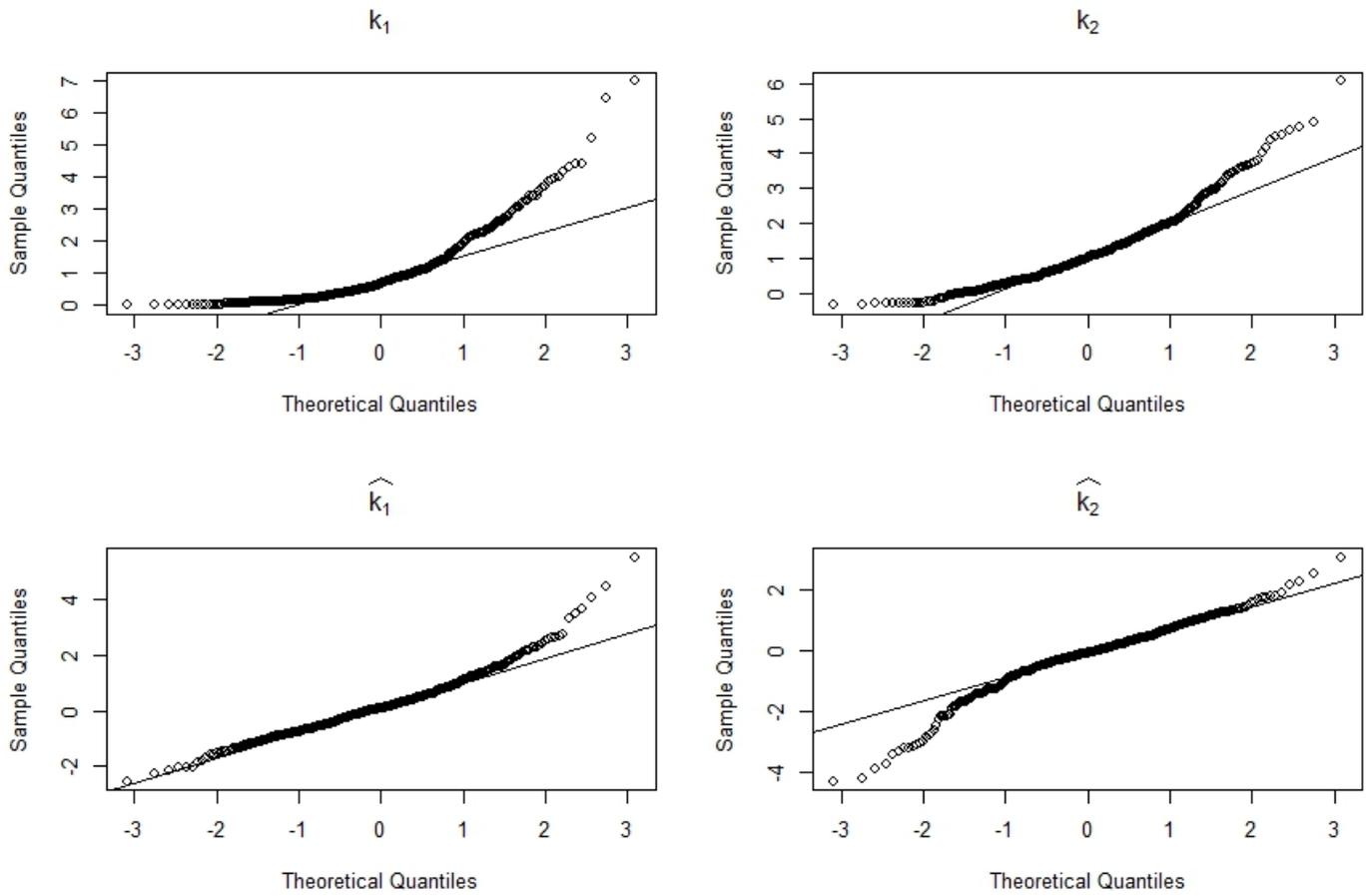


Figura 14: QQ plot della distribuzione dei parametri risultante dalle calibrazioni effettuate sui dati simulati

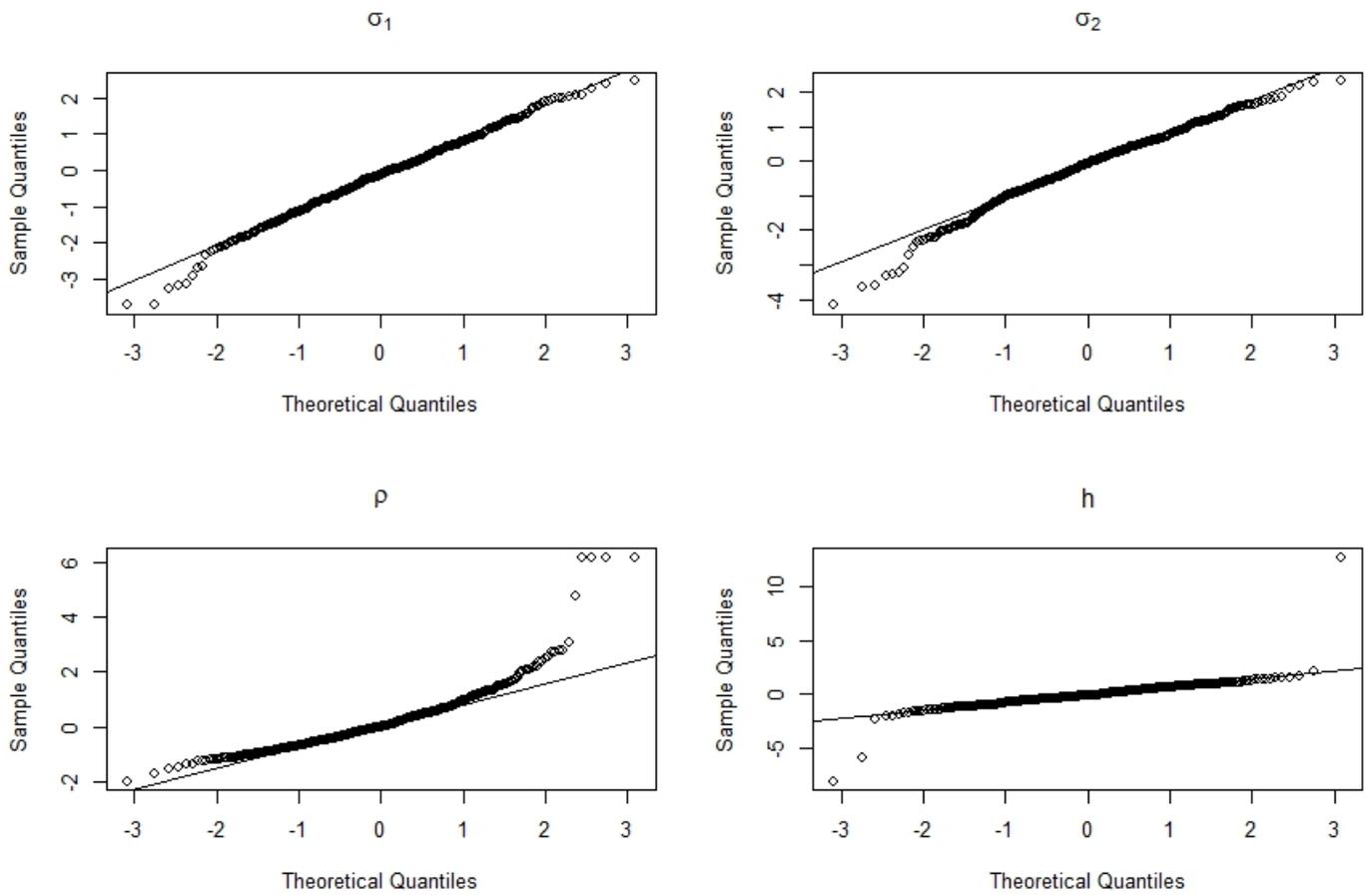


Figura 15: QQ plot della distribuzione dei parametri risultante dalle calibrazioni effettuate sui dati simulati

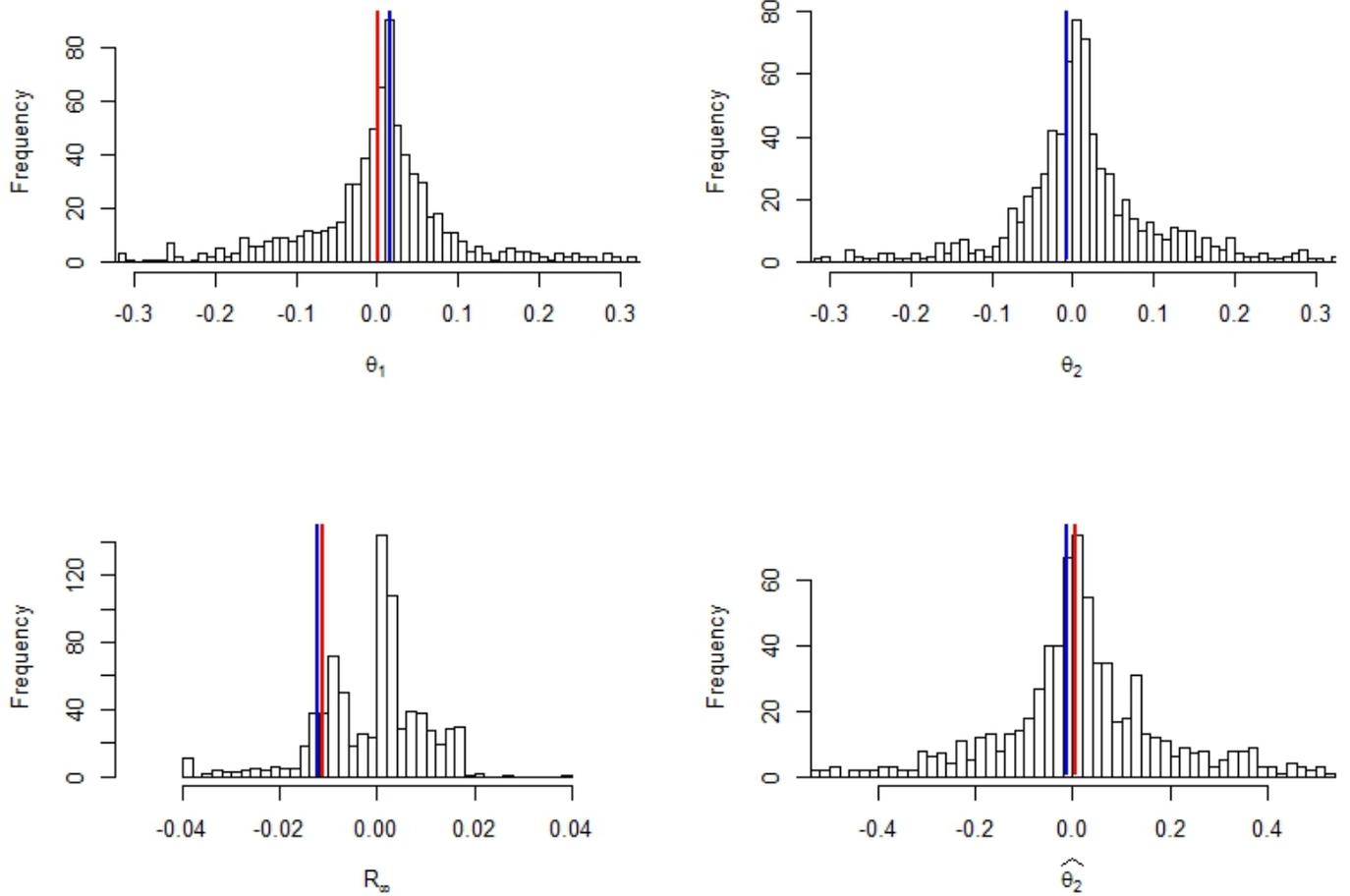


Figura 16: Distribuzione dei parametri risultante dalle calibrazioni effettuate su un insieme di dati simulati sulla base di 800 insiemi di parametri iniziali estratti con Sobol. La linea rossa indica il parametro vero mentre la linea blu la stima di massima verosimiglianza dei parametri.

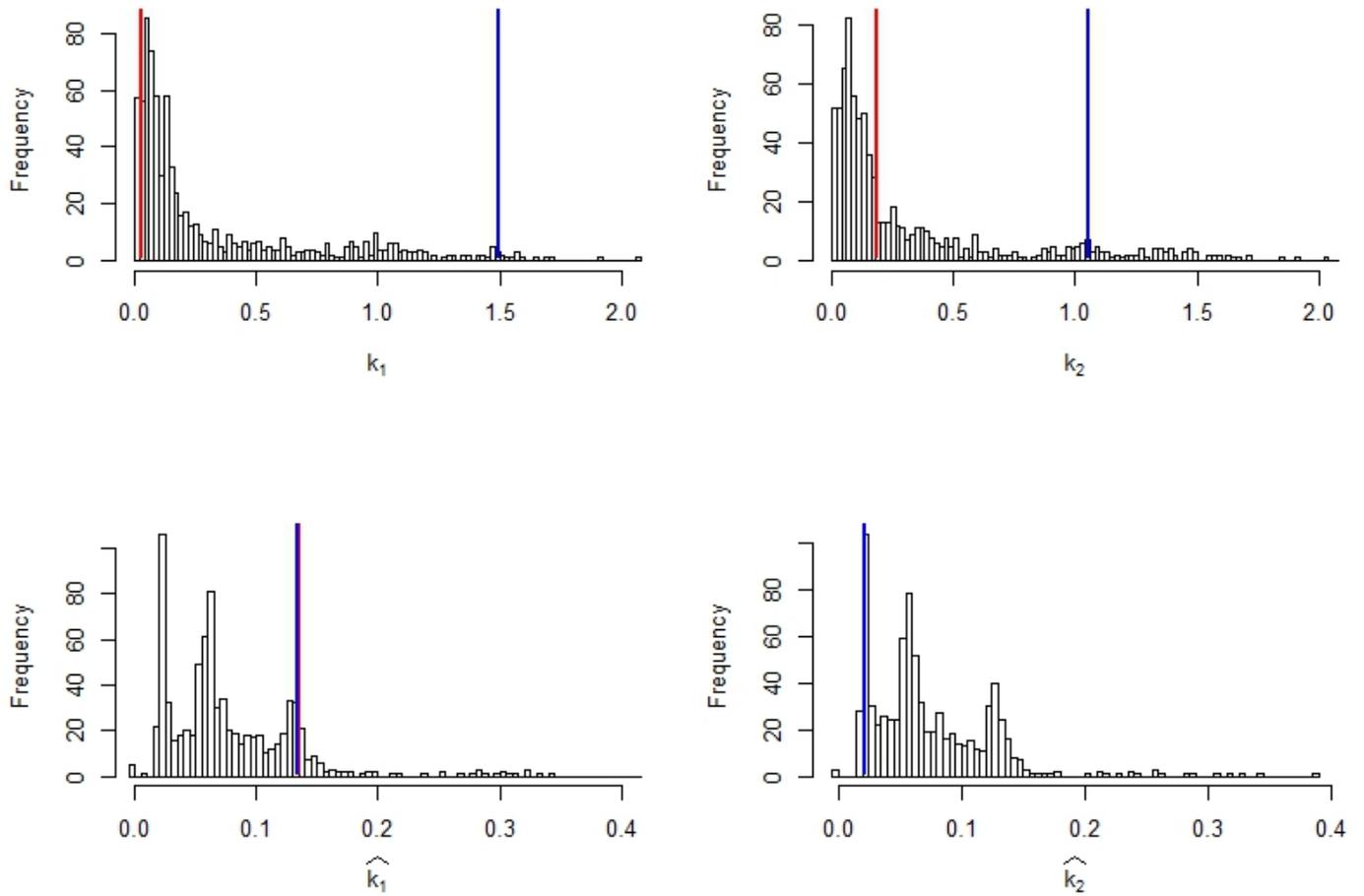


Figura 17: Distribuzione dei parametri risultante dalle calibrazioni effettuate su un insieme di dati simulati sulla base di 800 insiemi di parametri iniziali estratti con Sobol. La linea rossa indica il parametro vero mentre la linea blu la stima di massima verosimiglianza dei parametri.

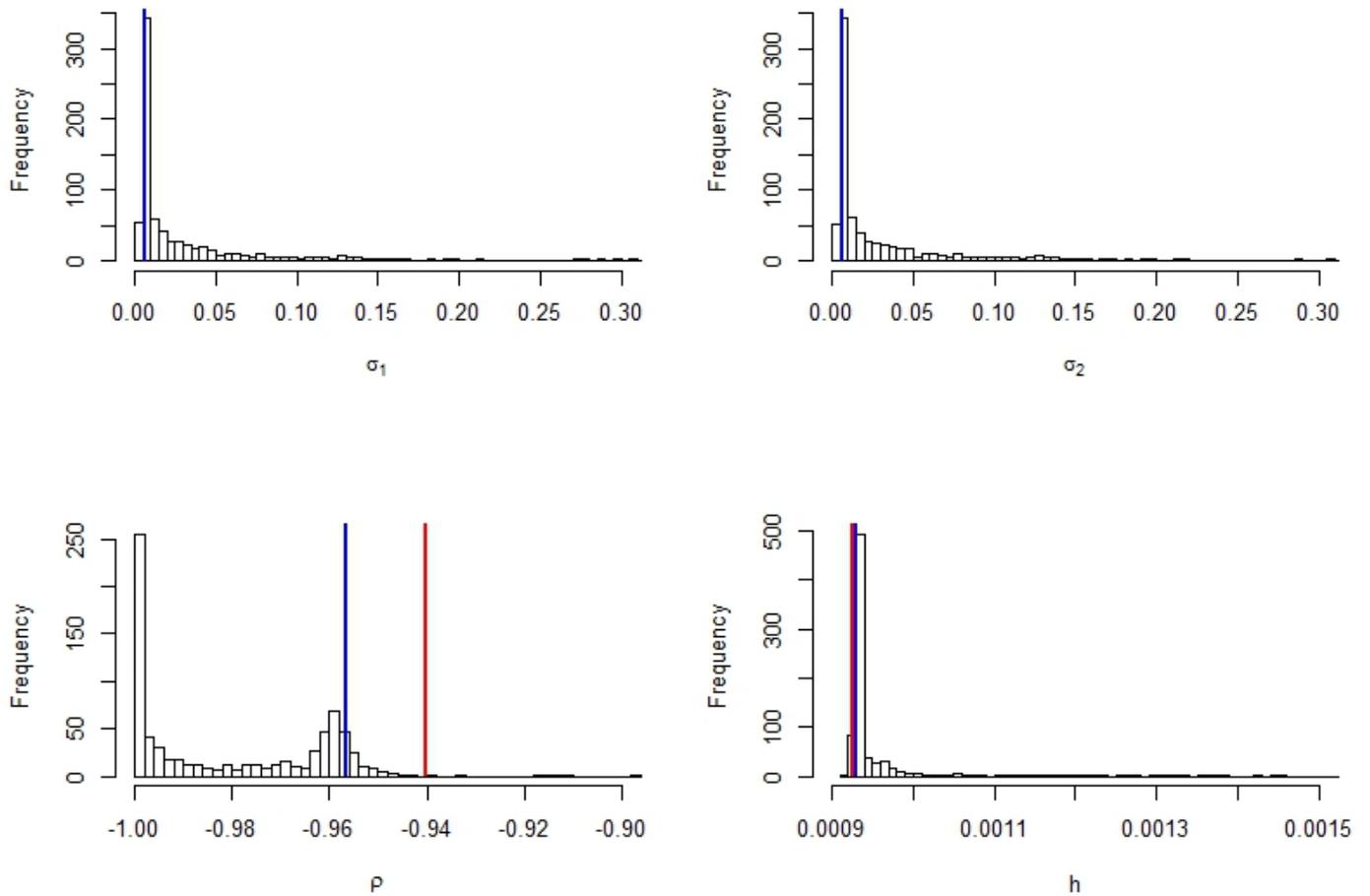


Figura 18: Distribuzione dei parametri risultante dalle calibrazioni effettuate su un insieme di dati simulati sulla base di 800 insiemi di parametri iniziali estratti con Sobol. La linea rossa indica il parametro vero mentre la linea blu la stima di massima verosimiglianza dei parametri.