

Modelli e strumenti di calcolo attuariale per la previdenza

Fabio Grasso

*Dipartimento di Scienze Statistiche
Università degli Studi di Roma “La Sapienza”*

Abstract

Lo sviluppo dei fondi pensione, in conseguenza dei provvedimenti di riforma della previdenza emanati in Italia dal legislatore negli ultimi due decenni, rappresenta una delle più significative espressioni del processo di radicale innovazione che caratterizza oggi la realtà assicurativo-previdenziale. I rilevanti mutamenti intervenuti nello scenario di riferimento, connessi ad aspetti di differente natura (demografica, finanziaria, economica e sociale oltrechè normativa), hanno contribuito a disegnare un nuovo assetto per la previdenza e hanno determinato importanti conseguenze per il ruolo che in essa è assunto dall'Attuario. In particolare, sono emerse nuove esigenze di calcolo e di valutazioni attuariali, anche connesse a profili non appartenenti alla tradizione della modellistica attuariale in campo previdenziale (ad esempio, la valutazione della solvibilità di un fondo pensione). La matematica e la tecnica attuariale, fermi restando alcuni fondamentali e consolidati principi di calcolo, non possono ignorare la necessità di innovazione modellistica. In questo lavoro si evidenzia come, nel mutato contesto operativo della previdenza, pubblica e complementare, l'Attuario sia stato in grado di sviluppare nuove metodologie e procedure di calcolo.

Keywords

Pension funds; Annuities; Longevity risk; Stochastic mortality models; Stochastic simulations; Risk management; Actuarial calculations.

1. I MODELLI DI CALCOLO ATTUARIALE PER LA PREVIDENZA

1.1 LE ORIGINI

In relazione ai modelli di calcolo attuariale per la previdenza può essere delineato un percorso unificato per i due “pilastri” della previdenza:

- la previdenza pubblica (“primo pilastro”);
- la previdenza complementare (“secondo pilastro”).

I primi modelli di calcolo attuariale, in ambito previdenziale, si collocano tra la fine del XIX secolo e l’inizio del XX secolo e sono contemporanei alla nascita dei primi sistemi di

previdenza pubblica (in Italia, nel 1898, l'assicurazione obbligatoria contro gli infortuni sul lavoro). Essi hanno potuto beneficiare del ben collaudato impianto tecnico-attuariale delle assicurazioni sulla vita (infatti, i primi modelli in tale ambito si collocano nella seconda metà del XVII secolo).

Rendita vitalizia e formula di Halley

Si ipotizzi che lo schema previdenziale eroghi soltanto prestazioni in caso di vita del tipo rendita vitalizia (vale a dire, una pensione di vecchiaia). Il valore attuale atteso di una rendita immediata posticipata e con rata annua unitaria, a_x , può essere espresso mediante la nota formula di Halley (1693):

$$(1) \quad a_x = \sum_{k=1}^{\omega-x} {}_k p_x (1+i)^{-k} ,$$

dove:

- $(1+i)^{-1}$ è il fattore annuo di attualizzazione finanziaria;
- ω denota l'età estrema;
- ${}_k p_x$ è la probabilità che l'assicurato, di età x all'inizio del periodo di pagamento della rendita, sia in vita all'età $x+k$.

Il modello di calcolo attuariale sottostante la formula di Halley presenta elementi di interesse e, anche, di criticità. In particolare, esso considera un'unica causa di uscita ed è discreto rispetto al tempo; inoltre, è:

- 1) statico;
- 2) deterministico.

Il modello è statico in quanto si basa sull'impiego di probabilità (di sopravvivenza, ${}_k p_x$) tratte da osservazioni "di periodo" e la costruzione di una tavola di mortalità di periodo poggia su un'ipotesi di mortalità statica, in contrasto con l'esistenza di un "trend (migliorativo) di mortalità".

Il modello è deterministico poichè le probabilità (di sopravvivenza) sono impiegate soltanto per calcolare valori attesi. Il rischio di mortalità (vale a dire, la possibilità di miglioramenti imprevisti nella mortalità) è "riassunto" in termini di un caricamento implicito di sicurezza, attuato mediante il calcolo del valore attuale atteso (1) con una base demografica prudentiale (favorevole all'assicuratore). Nel calcolo attuariale è quindi assente una qualsiasi misura di quantificazione del rischio di mortalità (ad esempio, la varianza del valore attuale aleatorio della prestazione assicurata).

In sintesi, si evidenzia l'incompatibilità:

- di un modello statico con la dinamica della mortalità;
- di un modello deterministico con l'incertezza relativa alla dinamica della mortalità.

1.2 SCENARI DEMOGRAFICI ED EVOLUZIONE DEI MODELLI

Le variazioni negli scenari demografici e la natura, stocastica, di questi hanno determinato, nel tempo, una progressiva transizione:

- 1) da modelli statici a modelli dinamici;
- 2) da modelli deterministici a modelli stocastici.

Modelli dinamici

La consapevolezza dell'esistenza di un trend di mortalità in grado di determinare, con l'uso di una tavola di mortalità di periodo, una sottovalutazione del costo della prestazione relativa a una copertura di rendita vitalizia risale alla seconda metà del XIX secolo. In particolare, si segnala il contributo di Gylden, risalente al 1876, che propose un'estrapolazione lineare del tasso centrale di mortalità della popolazione svedese.

Tuttavia, soltanto negli ultimi decenni del XX secolo sono stati definiti metodi estrapolativi soddisfacenti per le applicazioni alle assicurazioni sulla vita (quindi, idonei anche per la previdenza). Essi si basano sulla costruzione di tavole (di mortalità) proiettate, nelle quali le probabilità di sopravvivenza sono determinate proiettando, mediante un opportuno modello, il trend di mortalità osservato in un precedente periodo di tempo.

Modelli stocastici

La transizione da un modello attuariale deterministico a un modello in grado di quantificare opportunamente il rischio di mortalità in un portafoglio di rendite vitalizie è stata graduale ed estesa su un ampio intervallo di tempo.

La fondamentale distinzione che deve essere fatta, in proposito, riguarda l'evidente necessità di considerare (e, quindi, valutare) la rischiosità originata:

- dagli scarti accidentali della mortalità;
- dagli scarti sistematici della mortalità.

Numerosi sono i contributi scientifici che, a partire dalla fine del XVIII secolo, hanno potenziato il modello attuariale considerando la prima delle suddette componenti di rischio.

In particolare, si segnala il contributo di Tetens (1786) che costituisce una pietra angolare della teoria individuale del rischio.

Questi contributi non hanno però avuto rilevanti applicazioni, soprattutto per il fatto che la rischiosità derivante dagli scarti accidentali della mortalità diminuisce, in termini relativi, al crescere della dimensione n del portafoglio assicurativo (si tratta di un “pooling risk”) e può quindi essere adeguatamente fronteggiata dall’assicuratore con un aumento della dimensione del portafoglio (grazie, anche, al ricorso alla riassicurazione).

Per quel che concerne la rischiosità derivante dagli scarti sistematici della mortalità (rispetto ai valori attesi dei numeri dei decessi) si osserva che soltanto negli ultimi due-tre decenni, in conseguenza di una marcata (e più irregolare) evoluzione della mortalità, si è diffusa la consapevolezza del rischio di longevità (“longevity risk”), il quale provoca, nel caso di rendite vitalizie, scarti sistematici della mortalità sfavorevoli per l’assicuratore.

Il rischio di scarti sistematici, in termini relativi, è indipendente dalla dimensione n del portafoglio e il suo impatto finanziario totale è crescente con n (si tratta di un “non-pooling risk”). Le conseguenze negative di questa componente di rischiosità non sono pertanto diversificabili con un aumento della dimensione del portafoglio.

Nell’ambito dei modelli stocastici per la proiezione della mortalità, si segnalano i recenti fondamentali contributi di Carter e Lee (1992) e di Renshaw e Haberman (2003). Ai fini della gestione del rischio di longevità meritano inoltre di essere ricordati i moderni approcci della copertura mediante l’impiego di strumenti finanziari alternativi (“longevity bonds”, “survivor swaps”, ecc.).

Teoria delle collettività

Rispetto alle altre caratteristiche di interesse della formula di Halley, si osserva che a partire dalla seconda metà del XVIII secolo un importante contributo ai futuri modelli attuariali per la previdenza è stato fornito dalla teoria delle collettività (o, anche, teoria dei decrementi multipli), in grado di trattare collettività suddivise in gruppi e soggette a una pluralità di cause di eliminazione.

Infatti, un sistema previdenziale pubblico (in particolare, l’assicurazione obbligatoria per l’invalidità, la vecchiaia e i superstiti) può essere trattato come un particolare esempio di collettività di questo tipo, dove le cause di eliminazione sono individuate dagli eventi di morte, invalidità permanente, vecchiaia, ecc.

Sotto il profilo dell'impostazione matematica, la teoria delle collettività si è sviluppata dapprima nell'ambito di modelli "a tempo continuo" e solamente in seguito, verso la fine del XVIII secolo, ha trovato impulso la modellizzazione "a tempo discreto". Si segnalano, in particolare, alcuni contributi di Cournot e D'Alembert (nel caso continuo) e di Trembley (nel caso discreto).

I modelli discreti sono stati quelli prevalentemente presi in considerazione, a partire dalla fine del XIX secolo, nelle concrete applicazioni del calcolo attuariale ai sistemi previdenziali pubblici. Questa scelta trova la sua principale spiegazione nell'evoluzione tecnologica nel settore dell'elettronica, che ha reso disponibili strumenti di calcolo automatico in grado di operare, in forma immediatamente programmabile e con crescente precisione nel tempo, nei riguardi di modelli discreti caratterizzati da notevole e crescente complessità. La trattazione dei problemi di calcolo attuariale ha pertanto privilegiato la via numerica rispetto alla via analitica.

Solamente negli ultimi decenni del XX secolo, contemporaneamente alla nascita dei primi sistemi di previdenza complementare, si è registrato un rinnovato interesse per i modelli continui.

1.3 NUOVI STRUMENTI DI CALCOLO E APPROCCI METODOLOGICI

Il calcolo attuariale per la previdenza, in un contesto di modelli stocastici e dinamici, si è ulteriormente potenziato, negli ultimi decenni del XX secolo, anche grazie alla diffusione (peraltro inferiore alle aspettative, in Italia) dei sistemi di previdenza complementare. I segni più tangibili di questo importante processo di innovazione possono essere sintetizzati:

- 1) nell'impiego di nuovi strumenti di calcolo;
- 2) nell'adozione di nuovi approcci metodologici.

In relazione ai primi, oltre a ricordare l'estensione alla previdenza di noti modelli utilizzati per la copertura dei rischi nelle assicurazioni "equity-linked" e "index-linked" (modello di Brennan e Schwartz, ecc.), si segnala la simulazione stocastica. Per i secondi meritano di essere evidenziati i modelli multistato e, negli ultimi anni, il crescente interesse per il Risk management.

La simulazione stocastica

In relazione ai problemi di calcolo dei momenti (successivi al primo) delle distribuzioni di probabilità delle variabili aleatorie di interesse per la previdenza (le retribuzioni, gli oneri per

pensioni, ecc.), ha registrato notevole interesse, sia teorico sia applicativo, l'approccio della simulazione stocastica (o, anche, metodo Montecarlo).

In sintesi, si tratta di un procedimento finalizzato alla costruzione numerica di campioni di un processo stocastico che permette di ottenere approssimazioni ottime delle grandezze oggetto di valutazione. Esso si contrappone al procedimento di calcolo diretto dei momenti delle variabili aleatorie di interesse, tradizionalmente utilizzato nella modellistica attuariale applicata al settore della previdenza.

L'impiego della simulazione stocastica in ambito previdenziale si è sviluppato negli ultimi decenni del XX secolo, con il fondamentale apporto degli attuari italiani. In particolare, si segnala il "Metodo degli Anni di Gestione su base Individuale e per Sorteggio" (è noto l'acronimo M.A.G.I.S.), proposto da Coppini (1979) e Tomassetti (1973, 1979). Nell'ambito di un'assicurazione obbligatoria per l'invalidità, la vecchiaia e i superstiti, il M.A.G.I.S. pone l'attenzione su un determinato periodo, tipicamente l'anno, e procede alla simulazione delle variabili aleatorie di interesse relative a questo periodo per ciascuno dei componenti della collettività in esame (suddivisa in attivi e pensionati, questi ultimi suddivisi in pensionati diretti, indiretti e di reversibilità); la simulazione assume il tempo come parametro operativo e viene replicata, di periodo in periodo, fino a quando la collettività presa in esame è completamente estinta.

Il M.A.G.I.S. e altri modelli di simulazione stocastica (in particolare, si segnala un metodo, proposto da Crisma (1982) e Bacinello (1988), che assume l'individuo, attivo o pensionato, come parametro operativo e procede alla simulazione delle variabili aleatorie di interesse relative all'individuo e al suo eventuale nucleo superstite) sono oggi frequentemente in uso, in Italia e all'estero, nelle valutazioni attuariali relative alle gestioni previdenziali.

I modelli multistato

Un importante sostegno all'evoluzione dei modelli di calcolo attuariale per la previdenza è inoltre venuto, a partire dagli ultimi decenni del XX secolo, dalla modellistica multistato, sviluppata nell'ambito di modelli sia continui sia discreti.

In sintesi, si tratta di un'impostazione estremamente rigorosa sotto il profilo matematico-probabilistico e in grado di ricondurre diverse valutazioni attuariali delle assicurazioni di persone, riguardanti i rischi tipici delle assicurazioni sulla vita e della previdenza (morte, invalidità permanente, infortuni, malattia, ecc.) nell'ambito della teoria dei processi stocastici markoviani.

Anche in questo caso è da evidenziare il rilevante apporto degli attuari italiani. In particolare, si segnala il contributo di Taucer (1936) che ha anticipato di circa mezzo secolo la moderna modellistica multistato. Infatti, nell'ambito di un modello continuo, Taucer ha introdotto un'elegante trattazione formale delle collettività suddivise in gruppo, fondata sull'impiego delle equazioni integrali di Volterra di seconda specie, utile per una chiara formalizzazione dell'assicurazione obbligatoria per l'invalidità, la vecchiaia e i superstiti.

Il Risk management

Negli ultimi anni la necessità di un'adeguata valutazione della solvibilità (di un portafoglio assicurativo o di uno schema di previdenza complementare) ha ulteriormente stimolato lo sviluppo di nuovi modelli per la quantificazione del rischio sulla base di un rigoroso impianto probabilistico e di una dettagliata identificazione delle diverse cause di rischio.

Nell'ambito di uno schema di previdenza complementare, analogamente a quanto avviene in un'assicurazione sulla vita, occorre quindi considerare l'evoluzione aleatoria connessa sia alla componente demografica sia alla componente finanziaria (in relazione a quest'ultima, in particolare, è interessante osservare che il rischio finanziario è un "non-pooling risk").

Oltre a queste componenti va considerata l'evoluzione aleatoria connessa alla componente economica; nella gestione previdenziale, il rischio economico deriva:

- dall'andamento delle retribuzioni;
- dall'andamento dell'inflazione;
- dall'andamento della previdenza pubblica di base.

Negli ultimi anni, grazie anche alla forte sollecitazione derivante dal progetto Solvency II, si è manifestato un crescente interesse per il Risk management.

In campo assicurativo, come osserva Pitacco (2010), il Risk management non deve essere inteso come un nuovo modello attuariale; infatti, esso costituisce un insieme di "linee guida" per una reinterpretazione, formale e operativa, del processo assicurativo (e riassicurativo) articolata attraverso le seguenti fasi:

- identificazione dei rischi;
- quantificazione dei rischi;
- analisi delle azioni disponibili;
- scelta delle azioni;
- monitoraggio.

Il Risk management è un approccio tipicamente interdisciplinare che definisce, per la gestione assicurativa, un processo ciclico: infatti, la conclusiva fase di monitoraggio costituisce la premessa per l'avvio di una nuova fase di identificazione dei rischi, alla quale fa seguito una nuova fase di quantificazione dei rischi, ecc.

Le linee guida del Risk management intendono:

- da un lato, stimolare una maggiore consapevolezza sull'utilizzo di strumenti attuariali tradizionali (in prevalenza, deterministici);
- dall'altro lato, evidenziare la necessità di implementare modelli di calcolo attuariale stocastici.

L'adozione del Risk management privilegia un approccio integrato ("corporate approach") al problema della valutazione dei rischi dell'attività di uno schema previdenziale e stimola l'Attuario ad "aprirsi" a contributi scientifici provenienti da discipline (in particolare, di tipo economico-aziendale) estranee alla tradizione scientifica attuariale.

Dall'incontro di queste discipline derivano, ancora oggi, problemi di linguaggio, di coerenza tra vari concetti, talvolta di incompatibilità tra approcci ben consolidati nei rispettivi ambiti disciplinari.

Se il processo di integrazione tra i diversi contributi scientifici saprà realizzare innanzitutto un'unificazione concettuale e linguistica, rilevanti potranno essere i futuri benefici, per un assicuratore vita e per un gestore di uno schema di previdenza complementare, in termini di un'appropriata gestione dei relativi rischi.

2. L'ATTUARIO E LA PREVIDENZA COMPLEMENTARE

2.1 VISIBILITÀ DELL'ATTUARIO

I modelli attuariali per la previdenza, sulla base dei fondamentali principi di calcolo attuariale (applicati ai sistemi pensionistici pubblici fin dalla loro nascita), hanno mostrato, nel tempo (soprattutto in epoca recente), discreta capacità di sviluppare e adottare sia nuovi approcci metodologici sia nuovi strumenti di calcolo.

In sintesi, si può quindi affermare che tradizione e innovazione coesistono bene e che, forse, la prima resta la migliore base di partenza per la seconda.

E' tuttavia evidente un importante elemento di criticità: la modesta visibilità dell'Attuario.

Alcuni giorni fa, il 28 novembre 2012, è stato festeggiato a Roma il 70° compleanno dell'Ordine degli Attuari, con un Convegno dal titolo "*1942-2012: passato, presente e futuro nella professione di Attuario in Italia*". Nei lavori del Convegno sono stati presentati alcuni dati molto significativi: attualmente gli Attuari sono oltre 80.000 nel mondo, circa 20.000 in Europa, soltanto circa 900 in Italia.

Il tasso di disoccupazione degli Attuari, in Italia, è pressoché eguale a zero e la domanda di Attuari è ben superiore all'offerta, come testimonia anche il numero di proposte di lavoro che raggiungono i destinatari prima ancora che questi abbiano completato il percorso di studi universitari (in particolare, il Corso di laurea magistrale). I principali sbocchi professionali, inoltre, sono molto interessanti e spesso anche con la concreta possibilità di assumere, nel tempo, posizioni di alta responsabilità.

Le Università che offrono Corsi di laurea e di laurea magistrale in campo attuariale, da un lato, l'Ordine e il Consiglio Nazionale degli Attuari, dall'altro lato, hanno recentemente potenziato l'attività di comunicazione per far meglio conoscere sia il percorso di studi universitari sia l'ampia e altamente qualificata attività professionale dell'Attuario nei settori assicurativi, previdenziali, finanziari e, più in generale, in tutti quei settori economici che richiedono competenze specifiche in materia di analisi, valutazione e gestione dei rischi.

Malgrado tutto ciò, gli Attuari in Italia continuano a essere poco visibili.

2.2 SCELTE DEL LEGISLATORE E RUOLO DELL'ATTUARIO

La visibilità, modesta, dell'Attuario operante nel settore della previdenza ha recentemente rischiato di subire effetti negativi anche da un'informazione che, pur priva di fondamento sotto il profilo tecnico, ha avuto ampia diffusione.

Infatti, a seguito dell'emanazione del decreto legislativo 5 dicembre 2005, n. 252, che costituisce l'attuale base normativa di riferimento del sistema di previdenza complementare in Italia, da più parti si è (erroneamente) osservato che le scelte del legislatore hanno quasi del tutto svuotato il campo di attività professionale dell'Attuario nella previdenza complementare in quanto il principio adottato per stabilire l'equilibrio tra le entrate (per contributi) e le uscite (per prestazioni) nelle nuove forme pensionistiche complementari (o, anche, fondi pensione) è di tipo finanziario e non prevede, quindi, l'accantonamento di una riserva di tipo attuariale.

Forme pensionistiche complementari

Il decreto legislativo 5 dicembre 2005, n. 252, ha individuato le seguenti forme pensionistiche complementari:

- a) fondi pensione negoziali (o, anche, fondi chiusi);
- b) fondi pensione aperti;
- c) fondi pensione preesistenti;
- d) contratti di assicurazione sulla vita con finalità previdenziali (o, anche, piani individuali pensionistici).

Le suddette forme pensionistiche complementari, con la sola (parziale) eccezione dei fondi pensione preesistenti, sono fondi assicurati in quanto prevedono la partecipazione di almeno un intermediario finanziario nella gestione previdenziale. Esse si distinguono inoltre in:

- a) forme collettive;
- b) forme individuali.

In particolare, sono forme collettive i fondi pensione negoziali, i fondi pensione aperti che ricevono adesioni collettive e i fondi pensione preesistenti. Sono invece forme individuali i fondi pensione aperti che ricevono adesioni individuali e i contratti di assicurazione sulla vita con finalità previdenziali.

L'adesione alle forme pensionistiche complementari è libera e volontaria.

Principi di equilibrio tra contributi e prestazioni

In uno schema di previdenza complementare l'equilibrio tra le entrate (per contributi) e le uscite (per prestazioni) può essere variamente definito. Infatti, si può considerare:

- un equilibrio collettivo (tipicamente adottato nel "primo pilastro" della previdenza);
- un equilibrio individuale (tipicamente adottato nel "terzo pilastro" della previdenza).

L'equilibrio collettivo è di tipo attuariale in quanto considera sia la componente demografica sia la componente finanziaria, mentre l'equilibrio individuale può essere:

- di tipo attuariale;
- di tipo finanziario.

Il principio di equilibrio individuale finanziario, privilegiato dalle scelte che il legislatore ha operato con il decreto legislativo n. 252/2005, ha tuttavia significato soltanto nel periodo di attività dell'assicurato (durante il quale sono versati i contributi). Nel successivo (eventuale) periodo di quiescenza dell'assicurato l'equilibrio tra i contributi e le prestazioni è, infatti, di tipo individuale attuariale: esso è definito in relazione a una collettività costituita da una

pluralità di assicurati omogenei rispetto alle principali caratteristiche rilevanti per la quantificazione del rischio assicurato ed è garantito dalla riserva matematica generata dal capitale di copertura della rendita.

Se si considera l'intera durata di vita dell'assicurato (inizialmente in attività, in seguito eventualmente in quiescenza) l'equilibrio individuale tra i contributi e le prestazioni, in tal caso, è pertanto di tipo misto (in parte finanziario, in parte attuariale) e opera nel seguente modo:

- nell'iniziale periodo di attività dell'assicurato (quindi, nel periodo di corresponsione dei contributi), l'equilibrio è di tipo finanziario;
- nel successivo periodo di quiescenza dell'assicurato (quindi, nel periodo di erogazione della rendita), l'equilibrio è di tipo attuariale.

E' così evidente che, qualunque sia la scelta del legislatore in materia di soluzioni tecniche per la previdenza complementare, la gestione tecnica di un fondo pensioni non potrà in alcun modo non considerare l'accantonamento di una riserva di natura attuariale, derivante dallo sfasamento temporale tra la corresponsione dei contributi e l'erogazione della corrispondente prestazione pensionistica; di conseguenza, la gestione tecnica di un fondo pensioni non potrà comunque fare a meno della specifica competenza professionale dell'Attuario.

In Appendice sono descritti i diversi possibili principi di equilibrio (collettivo; individuale attuariale; individuale finanziario, quindi misto) tra contributi e prestazioni in uno schema di previdenza complementare.

Attività dell'Attuario nella previdenza complementare

Più in generale, malgrado la presenza di vari elementi di criticità e di rigidità dell'attuale sistema di previdenza complementare in Italia (tra gli altri, si evidenziano l'indirizzamento della previdenza complementare verso i fondi pensione a contributo definito e, inoltre, i vincoli posti al lavoratore per il conferimento del Trattamento di Fine Rapporto al fondo pensioni), il ruolo dell'Attuario appare comunque fondamentale e cruciale ai fini di un consistente sviluppo futuro, sia qualitativo sia quantitativo, dei fondi pensione.

Numerose sono infatti le attività professionali, in un fondo pensioni, che richiedono la specifica competenza dell'Attuario. Tra le altre, si segnalano le seguenti:

- costruzione e monitoraggio di basi tecniche (demografiche, economiche, finanziarie) specifiche per la previdenza complementare;
- introduzione di prestazioni accessorie (anche obbligatorie) per i rischi di premorienza e invalidità;

- predisposizione di coefficienti di trasformazione del capitale in rendita specifici per la previdenza complementare;
- valutazione dei costi della gestione previdenziale;
- previsione dei flussi periodici di entrate (per contributi) e uscite (per prestazioni), in particolare mediante tecniche di “Asset Liability Management”.

Anche per queste (e molte altre) importanti attività professionali dell’Attuario operante nella previdenza complementare appare necessario saper coniugare tradizione e innovazione per l’individuazione delle più idonee metodologie e procedure di calcolo.

APPENDICE

PRINCIPI DI EQUILIBRIO TRA CONTRIBUTI E PRESTAZIONI

Di seguito sono definiti e confrontati i diversi possibili principi di equilibrio tra i contributi e le prestazioni in uno schema di previdenza complementare che eroghi prestazioni in caso di vita del tipo rendita vitalizia (pensione di vecchiaia).

Ai fini della definizione dei principi di equilibrio non sono prese in considerazione le spese, di natura amministrativa e finanziaria, che gravano sulla gestione previdenziale.

A.1 PRINCIPIO DI EQUILIBRIO COLLETTIVO

Definizioni

L’adozione del principio di equilibrio collettivo tra contributi e prestazioni in uno schema di previdenza complementare richiede innanzitutto:

- a) la scelta di una collettività di riferimento;
- b) la scelta di un periodo di gestione.

Tipici esempi di collettività di riferimento sono i seguenti:

- gli attivi e i pensionati presenti all’epoca iniziale di valutazione (in tal caso si ha una collettività chiusa);
- gli attivi e i pensionati presenti all’epoca iniziale di valutazione, ai quali si aggiungono i nuovi ingressi (attivi) nel periodo di gestione (in tal caso si ha una collettività aperta).

Il periodo di gestione è individuato da un numero, N , di anni a partire dall'epoca iniziale di valutazione (sia essa l'epoca 0) che, per semplicità, si assume coincidente con l'epoca di avvio della gestione previdenziale. In particolare:

- per una collettività chiusa, esso può essere individuato dall'età estrema dell'attivo, di sesso femminile, più giovane della collettività (è questo il caso di una durata finita della gestione);
- per una collettività aperta, esso può essere più ampio ed è possibile porre, in particolare, $N=+\infty$ (è questo il caso di una durata illimitata della gestione).

Si osserva che la collettività di riferimento è costituita da assicurati eterogenei rispetto alle principali caratteristiche rilevanti per la quantificazione del rischio assicurato (vale a dire, la durata di vita): infatti, si hanno individui in attività lavorativa e in quiescenza, di sesso maschile e femminile, aventi diverse età all'ingresso in attività lavorativa, ecc.

Il principio di equilibrio collettivo, fondato sul criterio della speranza matematica, stabilisce che, in relazione alla data collettività in un qualunque istante k del prefissato periodo di gestione (quindi, $0 \leq k \leq N$), la somma del valore attuale atteso dei contributi futuri, nel residuo periodo di gestione $[k, N]$, e dell'eventuale riserva ivi accantonata, denominata riserva collettiva, eguagli il valore attuale atteso delle corrispondenti prestazioni future.

Per l'applicazione del principio di equilibrio collettivo è necessaria la fissazione di alcune basi tecniche. In particolare:

- 1) le basi demografiche: innanzitutto, le probabilità di eliminazione (definitiva) degli attivi dalla collettività per le cause di morte, invalidità, ecc.;
- 2) la base finanziaria: in accordo con un'impostazione deterministica della struttura finanziaria, essa è costituita dal tasso annuo di interesse (certo), i , in base al quale attualizzare le prestazioni;
- 3) le basi economiche: innanzitutto, l'andamento delle retribuzioni rispetto all'anzianità lavorativa e le variazioni delle retribuzioni (e delle pensioni) in termini reali.

Se anche per le basi economiche viene adottata un'impostazione deterministica, l'aleatorietà presa in esame ai fini dei calcoli attuariali è solamente quella connessa alla durata residua di permanenza di un assicurato nello stato di attivo.

Nel caso di una collettività aperta occorre inoltre formulare opportune ipotesi sui nuovi ingressi (attivi) nella collettività.

Adottato il metodo degli anni di gestione (o, anche, metodo delle stime annuali) ai fini della valutazione dei contributi e delle prestazioni, siano:

- C_t ($t=1,2,\dots,N$) il valore atteso dei contributi relativi alla data collettività nell'anno di gestione t ;
- O_t ($t=1,2,\dots,N$) il valore atteso degli oneri per prestazioni pensionistiche relativi alla data collettività nell'anno di gestione t , ad esempio:
 - le rate di pensione erogate ai pensionati presenti nell'anno;
 - i capitali di copertura delle rendite spettanti ai nuovi pensionati dell'anno.

Formulata, per semplicità, l'ipotesi che i contributi e gli oneri per pensioni siano corrisposti all'inizio di ciascun anno (quindi, alle epoche $0,1,\dots,N-1$), indicato con $v = (1+i)^{-1}$ il fattore annuo di attualizzazione finanziaria, all'epoca 0 l'equilibrio collettivo è così espresso:

$$(2) \quad \sum_{t=1}^N C_t v^{t-1} = \sum_{t=1}^N O_t v^{t-1} .$$

Con riferimento a uno schema di previdenza complementare a prestazione definita, fissati i valori attesi degli oneri per pensione (in breve, prestazioni) O_1, O_2, \dots, O_N , vi sono infinite possibilità di scelta dei valori attesi dei contributi (in breve, contributi) C_1, C_2, \dots, C_N in modo da verificare la (2). Analogamente avviene, a ruoli invertiti tra contributi e prestazioni, in uno schema di previdenza complementare a contributo definito.

Capitalizzazione collettiva

Con riferimento a uno schema previdenziale a prestazione definita, un qualsiasi criterio di calcolo dei contributi C_1, C_2, \dots, C_N tale che, fissate le prestazioni O_1, O_2, \dots, O_N , sia soddisfatto l'equilibrio collettivo (2) è definito sistema finanziario di gestione.

Nella letteratura attuariale la locuzione "sistema finanziario di gestione" viene utilizzata indipendentemente dal principio adottato per la realizzazione dell'equilibrio tra contributi e prestazioni. Nel caso di equilibrio di tipo attuariale (collettivo o individuale) sarebbe tuttavia più opportuna la locuzione "sistema attuariale (o tecnico-finanziario) di gestione".

Nell'ipotesi che, per ciascun attivo, il contributo, c_t , nell'anno t sia dato da un'aliquota, α_t , della relativa retribuzione, z_t , si ha $c_t = \alpha_t z_t$ e l'aliquota α_t è denominata aliquota di contribuzione (o, anche, premio medio).

Indicato con Z_t l'ammontare complessivo delle retribuzioni percepite, nell'anno t , dagli attivi che appartengono alla data collettività, si ha

$$(3) \quad C_t = \alpha_t Z_t .$$

La condizione di equilibrio collettivo (2) può pertanto essere così riscritta:

$$(4) \quad \sum_{t=1}^N \alpha_t Z_t v^{t-1} = \sum_{t=1}^N O_t v^{t-1} .$$

La (4) evidenzia come, fissate le retribuzioni Z_1, Z_2, \dots, Z_N e le prestazioni O_1, O_2, \dots, O_N , un sistema finanziario di gestione risulta individuato da una particolare sequenza di aliquote di contribuzione $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$.

Il problema ammette infinite soluzioni e ciascuna di esse determina, nel periodo di gestione, una differente distribuzione del carico relativo al finanziamento dello schema di previdenza complementare. In particolare, si distinguono:

- a) sistemi a capitalizzazione collettiva;
- b) sistemi a ripartizione.

In generale, un sistema finanziario di gestione è denominato sistema a capitalizzazione se la contribuzione relativa a un assicurato (attivo) concorre al finanziamento della prestazione (pensionistica) che potrà essere percepita in futuro dal medesimo assicurato. Lo sfasamento temporale esistente tra la corresponsione dei contributi e l'erogazione della prestazione determina quindi la formazione di una riserva. Nel caso in esame, poiché tra i contributi e le prestazioni vige un equilibrio collettivo (vale a dire, riferito a una pluralità di assicurati eterogenei rispetto alle principali caratteristiche rilevanti per la quantificazione del rischio assicurato), si ha una capitalizzazione collettiva (di tipo attuariale) e la riserva collettiva così costituita è ulteriormente scomponibile in:

- riserva degli attivi (o, anche, riserva degli oneri latenti);
- riserva dei pensionati (o, anche, riserva degli oneri maturati).

In un sistema a ripartizione la contribuzione relativa a un assicurato (attivo) non finanzia la prestazione pensionistica che potrà essere percepita in futuro dal medesimo assicurato, poiché tale finanziamento è interamente affidato ad altri soggetti (ad esempio, alle future generazioni di attivi). E' pertanto possibile che non si determini la formazione di una riserva (collettiva).

I sistemi finanziari di gestione adottati nella previdenza complementare in base al principio di equilibrio collettivo sono tipicamente sistemi a capitalizzazione collettiva.

Esempio 1

Si consideri uno schema di previdenza complementare a prestazione definita e una collettività aperta, costituita dagli attivi e dai pensionati presenti all'epoca 0 e, inoltre, dai nuovi ingressi (attivi) nel periodo di gestione (N anni, eventualmente $N=+\infty$). Si ipotizzi inoltre che gli oneri per prestazioni pensionistiche consistano nel pagamento delle rate di pensione ai pensionati presenti all'inizio di ciascun anno di gestione.

Indicato con $O_t^{(R)}$ l'onere in questione per l'anno t, la condizione di equilibrio collettivo (4) assume la seguente espressione:

$$(5) \quad \sum_{t=1}^N \alpha_t^{(R)} Z_t v^{t-1} = \sum_{t=1}^N O_t^{(R)} v^{t-1} .$$

Nell'ipotesi che l'equilibrio tra i contributi e le prestazioni venga realizzato, in particolare, mediante un'aliquota di contribuzione costante nel periodo di gestione, vale a dire

$$(6) \quad \alpha_t^{(R)} = \alpha^{(R)} , \quad t = 1, 2, \dots, N ,$$

si ottiene il sistema finanziario di gestione denominato sistema del premio medio generale, diffusamente adottato nella previdenza pubblica di base.

Esso è individuato dall'aliquota di contribuzione

$$(7) \quad \alpha^{(R)} = \frac{\sum_{t=1}^N O_t^{(R)} v^{t-1}}{\sum_{t=1}^N Z_t v^{t-1}} .$$

In particolare, sia $\alpha(N)^{(R)}$ (rispettivamente, $\alpha(\infty)^{(R)}$) il premio medio generale nel caso di durata finita (rispettivamente, durata illimitata) della gestione.

Il sistema del premio medio generale è un sistema a capitalizzazione collettiva e determina, in un qualunque istante $k \neq 0$ del periodo di gestione, la formazione di una riserva collettiva.

A.2 PRINCIPIO DI EQUILIBRIO INDIVIDUALE ATTUARIALE

Definizioni

L'adozione del principio di equilibrio individuale attuariale tra i contributi e le prestazioni in uno schema di previdenza complementare richiede innanzitutto la scelta di una collettività di riferimento costituita da un gruppo di assicurati per i quali è ragionevole assumere, all'epoca iniziale di valutazione (sia essa l'epoca 0), condizioni di indifferenza rispetto al rischio.

Si consideri pertanto uno schema di previdenza complementare a prestazione definita e una collettività costituita da assicurati di sesso maschile e aventi età x all'epoca 0 di ingresso in attività che, per semplicità, si assume coincidente con l'epoca di avvio della gestione previdenziale. In relazione a ciascun assicurato, sia n l'epoca di ingresso in quiescenza e R la prefissata rata annua della rendita vitalizia (pensione di vecchiaia).

In tali ipotesi il principio di equilibrio individuale attuariale, fondato sul criterio della speranza matematica, stabilisce che, in relazione a ciascun assicurato della data collettività in un qualunque istante k del periodo di attività (quindi, $0 \leq k \leq n$), la somma del valore attuale atteso dei contributi futuri, indicato con $C^{[m]}[k, n]$, e della riserva ivi accantonata, denominata riserva matematica e indicata con $V_k^{[m]}$, eguagli il valore attuale atteso delle corrispondenti prestazioni, indicato con $O^{[m]}[k, n]$.

In simboli, si ha

$$(8) \quad C^{[m]}[k, n] + V_k^{[m]} = O^{[m]}[k, n] ,$$

con $V_0^{[m]} = 0$, $V_k^{[m]} > 0$ per $k \neq 0$ ed essendo

$$(9) \quad O^{[m]}[k, n] = R {}_{n-k}E_{x+k}^{[m]} \ddot{a}_{x+n}^{[m]} ,$$

dove ${}_{n-k}E_{x+k}^{[m]}$ è il fattore di sconto attuariale (all'età $x+k$, per una durata di $n-k$ anni) e $R \ddot{a}_{x+n}^{[m]}$ è il capitale di copertura della rendita.

In un qualsiasi istante k del periodo di quiescenza di ciascun assicurato (quindi, $k > n$), l'equilibrio individuale attuariale viene invece garantito dall'accantonamento di una riserva matematica di importo eguale a $R \ddot{a}_{x+k}^{[m]}$.

Anche ai fini dell'applicazione del principio di equilibrio individuale attuariale è necessaria la fissazione di opportune basi tecniche (di natura demografica, finanziaria ed economica). Poiché l'equilibrio è riferito a una collettività chiusa, è invece irrilevante la formulazione di ipotesi su eventuali futuri ingressi (attivi) nella collettività.

In caso di morte di un assicurato all'istante k , sia nello stato di attivo ($0 \leq k \leq n$) sia nello stato di pensionato ($k > n$), la riserva matematica accantonata è attribuita agli assicurati (della collettività di riferimento) superstiti, contribuendo così a finanziare le prestazioni che potranno essere erogate in futuro a loro favore.

Capitalizzazione individuale

Il valore attuale atteso, all'istante k ($0 \leq k \leq n$), dei contributi futuri può essere specificato mediante la definizione di un sistema finanziario di gestione. Nel caso in esame un sistema finanziario di gestione è un qualsiasi criterio di calcolo dei contributi (annui) c_1, c_2, \dots, c_s (con $1 \leq s \leq n$) tale che, prefissata la rata annua, R , della rendita vitalizia, all'epoca 0 sia soddisfatta la condizione di equilibrio individuale attuariale (8).

A questo fine si possono impiegare alcune leggi di tariffazione delle rendite vitalizie adottate abitualmente nell'assicurazione privata individuale. Tra le altre, si segnalano:

- a) la legge di tariffazione a premi annui costanti;
- b) la legge di tariffazione a premi unici ricorrenti.

Un qualsiasi sistema finanziario di gestione definito in base alla (8) è un sistema a capitalizzazione: infatti, la contribuzione relativa a un assicurato concorre al finanziamento della prestazione che potrà essere percepita in futuro dal medesimo assicurato. Nel caso in esame, poiché tra i contributi e le prestazioni vige un equilibrio individuale attuariale (vale a dire, riferito a una pluralità di assicurati omogenei rispetto alle principali caratteristiche rilevanti per la quantificazione del rischio assicurato), si ha una capitalizzazione individuale (di tipo attuariale).

Esempio 2

Si consideri uno schema di previdenza complementare a prestazione definita e una collettività costituita da assicurati di sesso maschile ed entrati in attività, in età x , all'epoca 0. Sia n l'epoca di ingresso in quiescenza e R la prefissata rata annua della rendita vitalizia. Si ipotizzi inoltre che la rendita vitalizia venga finanziata mediante il pagamento di premi annui (equi) costanti, indicati con $P^{[m]}$, per l'intera durata del differimento della rendita.

A partire dalla condizione di equilibrio (8), per $k = 0$, si ottiene il premio

$$(10) \quad P^{[m]} = \frac{R \cdot {}_n/\ddot{a}_x^{[m]}}{{}_n\ddot{a}_x^{[m]}} ,$$

dove ${}_n/\ddot{a}_x^{[m]}$ (rispettivamente, ${}_n\ddot{a}_x^{[m]}$) è il valore attuale atteso, all'epoca 0, di una rendita vitalizia differita (rispettivamente, temporanea) n anni e anticipata, di rata unitaria, per un individuo di sesso maschile ed età iniziale x . Il premio $P^{[m]}$ dipende ovviamente anche dall'età iniziale (x) degli assicurati e dalla durata (n anni) del differimento della rendita; per semplicità di notazione, ciò è omesso nella (10).

In tali ipotesi la riserva matematica pura, $V_k^{[m]}$, valutata prospettivamente all'epoca k (per semplicità, intera: $k = 0, 1, 2, \dots$), assume la seguente espressione (con $V_0^{[m]} = 0$):

$$(11) \quad V_k^{[m]} = \begin{cases} R \cdot {}_{n-k}/\ddot{a}_{x+k}^{[m]} - P^{[m]} \cdot {}_{/n-k}\ddot{a}_{x+k}^{[m]} & \text{se } k < n \\ R \cdot \ddot{a}_{x+k}^{[m]} & \text{se } k \geq n \end{cases}$$

A.3 PRINCIPIO DI EQUILIBRIO INDIVIDUALE FINANZIARIO

Definizioni

A differenza di un principio di equilibrio attuariale (di tipo individuale o collettivo), il quale richiede inizialmente la scelta di una collettività di riferimento, il principio di equilibrio individuale finanziario fa riferimento al singolo assicurato.

Si consideri pertanto uno schema di previdenza complementare a prestazione definita e un assicurato (ad esempio, un lavoratore dipendente di un'azienda) di sesso maschile e avente età x all'epoca 0 di ingresso in attività che, per semplicità, si assume coincidente con l'epoca di avvio della gestione previdenziale. Sia n l'epoca di ingresso in quiescenza e R la prefissata rata annua della rendita vitalizia.

In tali ipotesi il principio di equilibrio individuale finanziario stabilisce che, all'epoca n , il montante finanziario dei contributi versati nel periodo di attività $[0, n]$ (o, anche, montante accumulato) eguagli il capitale di copertura della rendita. Indicando con M_n il suddetto montante accumulato, all'epoca n , vale quindi la

$$(12) \quad M_n = R \ddot{a}_{x+n}^{[m]} .$$

Capitalizzazione finanziaria

Una qualsiasi sequenza di contributi che ottenga, all'epoca n , un montante accumulato eguale a $R \ddot{a}_{x+n}^{[m]}$ è, nelle fissate ipotesi, una modalità di finanziamento della rendita vitalizia coerente con il principio di equilibrio individuale finanziario: essa, pertanto, individua un sistema finanziario di gestione per il dato schema di previdenza complementare. Nel caso in esame si ha quindi la costituzione finanziaria (e non attuariale) del capitale di copertura della rendita.

In simboli, siano c_1, c_2, \dots, c_n i contributi versati dall'assicurato all'inizio degli n anni di attività e i_1, i_2, \dots, i_n i corrispondenti tassi annui di rendimento relativi all'investimento dei contributi. Si ha

$$(13) \quad M_n = \sum_{t=1}^n c_t (1+i_t) \dots (1+i_n) = R \ddot{a}_{x+n}^{[m]} .$$

Un sistema finanziario di gestione definito in base alla (13) è un sistema a capitalizzazione: in particolare, la contribuzione relativa all'assicurato finanzia in misura totale la prestazione che potrà essere percepita in futuro dal medesimo assicurato. Nel caso in esame, poiché tra i contributi e le prestazioni vige un equilibrio individuale finanziario (vale a dire, riferito al singolo assicurato), si ha una capitalizzazione finanziaria (e non attuariale).

La (13) pone inoltre in evidenza come il principio di equilibrio individuale finanziario abbia significato soltanto nel periodo di attività dell'assicurato, durante il quale vengono versati i contributi. Nel successivo (eventuale) periodo di quiescenza dell'assicurato, l'equilibrio tra i contributi e le prestazioni è invece di tipo individuale attuariale: esso è definito in relazione a una collettività di riferimento costituita da una pluralità di assicurati (nell'esempio in esame, i lavoratori dipendenti dell'azienda) omogenei rispetto alle principali caratteristiche rilevanti per la quantificazione del rischio assicurato ed è inoltre garantito dalla riserva matematica generata dal capitale di copertura della rendita.

Se si considera, pertanto, l'intera durata di vita dell'assicurato (inizialmente in attività, in seguito eventualmente in quiescenza) l'equilibrio tra i contributi e le prestazioni è di tipo misto (in parte finanziario, in parte attuariale).

In caso di morte dell'assicurato all'istante k compreso nel periodo di quiescenza ($k > n$) la riserva matematica accantonata è attribuita agli assicurati (della collettività di riferimento) superstiti, contribuendo così a finanziare le prestazioni che potranno essere erogate in futuro a loro favore.

In caso di morte dell'assicurato all'istante k compreso nel periodo di attività ($0 \leq k \leq n$) il montante finanziario dei contributi versati, ivi accumulato, è invece accreditato, in forma di capitale e/o rendita vitalizia, agli eventuali superstiti dell'attivo che ne abbiano diritto.

La prestazione aggiuntiva (rispetto alla prestazione base in caso di vita), erogata in caso di morte dell'assicurato nel periodo di attività, fa sì che il principio di equilibrio individuale finanziario sia per l'assicurato, a parità di prestazione base, più oneroso rispetto al principio di equilibrio individuale attuariale.

Esempio 3

Si consideri uno schema di previdenza complementare a prestazione definita e un assicurato (ad esempio, un lavoratore dipendente di un'azienda) di sesso maschile ed entrato in attività, in età x , all'epoca 0. Sia n l'epoca di ingresso in quiescenza e R la prefissata rata annua della rendita vitalizia. Si ipotizzi inoltre che:

- a) la rendita vitalizia venga finanziata mediante il pagamento di contributi annui anticipati costanti, indicati con W , per l'intera durata del differimento della rendita;
- b) sia $i_1 = i_2 = \dots = i_n = i$.

Nelle date ipotesi la condizione di equilibrio individuale finanziario (13) assume la seguente espressione:

$$(14) \quad \sum_{t=1}^n W (1+i)^{n-t+1} = R \ddot{a}_{x+n}^{[m]} .$$

Si ottiene quindi il contributo annuo

$$(15) \quad W = \frac{R \ddot{a}_{x+n}^{[m]}}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}$$

dove $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ è il montante finanziario, all'epoca n , di una rendita certa temporanea (n anni) e anticipata, di rata unitaria.

E' interessante confrontare il principio di equilibrio individuale finanziario così definito con il principio di equilibrio individuale attuariale realizzato, ad esempio, mediante la legge di tariffazione a premi annui costanti.

A parità di ogni altro elemento (età iniziale x , durata n anni, rata annua R della rendita, ecc.) sussiste, all'epoca n , la relazione

$$(16) \quad W \ddot{s}_{\bar{n}|} = P^{[m]} {}_{/n}s_x^{[m]} = R \ddot{a}_{x+n}^{[m]},$$

dove ${}_{/n}s_x^{[m]}$ è il montante attuariale, all'epoca n , di una rendita vitalizia temporanea n anni e anticipata, di rata unitaria, per un individuo di sesso maschile ed età iniziale x .

Poiché vale la

$$(17) \quad \ddot{s}_{\bar{n}|} < {}_{/n}s_x^{[m]},$$

si ha

$$(18) \quad W > P^{[m]}.$$

Il risultato così ottenuto esprime la maggiore onerosità, in termini di contributi a parità di prestazione, del principio di equilibrio individuale finanziario definito dalla (15) rispetto al principio di equilibrio individuale attuariale definito dalla (10).

BIBLIOGRAFIA

- [1] Blake D., Cairns A., Dawson P. (2006), Living with mortality: longevity bonds and other mortality-linked securities, *British Actuarial Journal*, 12, pp. 153-228.
- [2] Booth P., Chadburn R., Cooper D., Haberman S., James D. (1999), *Modern actuarial theory and practice*, Chapman & Hall / CRC, London.
- [3] Bowers N., Gerber H., Hickman J., Jones D., Nesbitt C. (1997), *Actuarial mathematics*, The Society of Actuaries, Schaumburg, Illinois.
- [4] Dowd S., Blake D., Cairns A., Dawson P. (2006), Survivor swaps, *The Journal of Risk and Insurance*, 73, pp. 1-17.
- [5] Grasso F. (2008), Profili attuariali della previdenza complementare, *Atti del Seminario "Il Trattamento di Fine Rapporto e i Fondi Pensione"*, EUM (Edizioni Università di Macerata), pp. 101-149, Macerata.

- [6] Grasso F. (2010), Ruolo dell'Attuario e innovazione modellistica per le pensioni di base e complementari, *Atti del IX Congresso Nazionale degli Attuari*, Torino.
- [7] Haberman S., Sibbett T. (Ed.) (1995), *History of actuarial science*, Pickering & Chatto, London.
- [8] Lee R., Carter L. (1992), Modeling and forecasting U. S. mortality, *Journal of the American Statistical Association*, 87, pp. 659-675.
- [9] Pitacco E. (2004), From Halley to "frailty": a review of survival models for actuarial calculations, *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, vol. 67, n.1-2, pp. 17-47.
- [10] Pitacco E. (2010), Rendite vitalizie: tra vecchie formule e nuovi scenari, *Atti del Convegno "Economia e incertezza"*, EUT (Edizioni Università di Trieste), pp. 137-155, Trieste.
- [11] Pitacco E., Denuit M., Haberman S., Olivieri A. (2009), *Modelling longevity dynamics for pensions and annuity business*, Oxford University Press.
- [12] Renshaw A., Haberman S. (2003), Lee-Carter mortality forecasting with age-specific enhancement, *Insurance: Mathematics and Economics*, 38, 3, pp. 556-570.
- [13] Tomassetti A. (Ed.) (1996), *Tecnica attuariale per collettività*, voll.1-2, Edizioni Kappa, Roma.
- [14] Zecchin M. (2004), *Lezioni di Tecnica attuariale delle assicurazioni sociali*, Dipartimento di Matematica Applicata alle Scienze Economiche, Statistiche e Attuariali "Bruno de Finetti", n. 1, Trieste.