

# La valutazione delle swaption con il modello $G2^{++}$

L. Passalacqua

Dipartimento di Scienze Statistiche, Sapienza Università di Roma,  
Viale Regina Elena, 295 – 00161 Roma.

luca.passalacqua@uniroma1.it

20 dicembre 2022

## Sommario

In questo lavoro si confrontano otto diversi approcci per la valutazione delle swaption mediante il c.d. modello  $G2^{++}$ , anche noto come modello di Hull e White a due fattori. La precisione e velocità degli algoritmi per la valutazione è rilevante quando essi vengono utilizzati nel contesto della calibrazione del modello  $G2^{++}$  su insiemi molto ampi di dati, quali, ad esempio, serie storiche di superfici di volatilità implicite.

**Parole chiave:** swaption,  $G2^{++}$ , modelli gaussiani, modelli HJM, metodi numerici.

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Swap e swaption</b>	<b>4</b>
2.1	Sugli swap . . . . .	4
2.2	Sulle swaption . . . . .	5
2.3	La valutazione delle swaption . . . . .	6
2.3.1	La valutazione con la misura risk neutral $\mathbb{Q}$ . . . . .	7
2.3.2	La valutazione con la misura T-forward $\mathbb{T}$ . . . . .	7
2.3.3	La valutazione con la misura forward-swap $\mathbb{F}$ . . . . .	8
2.3.4	Modelli di riferimento in regime di tassi negativi . . . . .	10
2.3.5	Una nota sulle convenzioni di mercato . . . . .	11
2.3.6	La replicazione delle swaption . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Il modello <math>G2^{++}</math></b>	<b>14</b>
3.1	Il modello di Hull e White e il modello $G2$ . . . . .	14
3.2	Il perfect fitting . . . . .	16
3.3	La distribuzione di $\mathbf{x}(t)$ sotto la misura $\mathbb{Q}$ . . . . .	18
3.4	La distribuzione di $\mathbf{x}(t)$ sotto la misura $\mathbb{T}$ . . . . .	19
3.5	Il modello $G2^{++}$ come modello HJM . . . . .	20
3.5.1	Sui modelli HJM . . . . .	20
3.5.2	La scelta del termine di volatilità . . . . .	21
3.5.3	Sul fattore di sconto . . . . .	24
<b>4</b>	<b>La valutazione delle swaption</b>	<b>26</b>
4.1	La valutazione con il Monte Carlo . . . . .	27
4.2	Le valutazioni per quadrature . . . . .	28
4.3	La approssimazione di Schrager e Pelsser . . . . .	29
4.4	La approssimazione di Choi e Shin . . . . .	31
4.5	L'algoritmo di Choi e Shin . . . . .	32
4.5.1	La determinazione di $\mathbf{z}^*(T)$ . . . . .	35
4.6	L'approccio di Russo e Torri . . . . .	37
4.7	Risultati numerici . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>44</b>

# 1 Introduzione

In questo lavoro vengono confrontati diversi algoritmi per la per la valutazione delle swaption mediante il c.d. modello  $G2^{++}$  (si vedano, ad es., [1], [2] e [7]), anche noto come modello di Hull e White a due fattori.

Il principale interesse verso il modello in oggetto deriva dal fatto che esso rappresenta tutt'ora un "ragionevole" compromesso tra complessità formale e aderenza ai dati di mercato.

Nella valutazione di un modello finanziario sono infatti rilevanti sia la capacità di replicare i prezzi di insiemi di contratti di riferimento ("aderenza al mercato"), sia la capacità di descrivere l'evoluzione temporale dei prezzi, al fine di misurarne i rischi. Dal punto di vista della letteratura di settore, la prima proprietà ha beneficiato di maggiore attenzione rispetto alla seconda. Tuttavia, è emblematico il fatto che l'estensione dei modelli di *pricing* alla valutazione dei rischi si sia rivelata di crescente difficoltà, all'aumentare del livello di aderenza ai prezzi di mercato.

Dal punto vista strutturale, il modello  $G2^{++}$  si situa al confine tra la classe dei modelli c.d. affini e la classe "più evoluta" dei modelli di Heath, Jarrow e Morton (si vedano, ad es., [1], [2] e [7]). Dai primi eredita la semplicità strutturale e la facilità di operare cambi di misura. Con i secondi condivide alcune proprietà, tra cui la capacità di riprodurre perfettamente la struttura per scadenza dei tassi di interesse ad una (singola) data prefissata (il c.d. "*perfect fitting*"). Diversamente, esso difetta della capacità di riprodurre perfettamente i prezzi di derivati "sulla volatilità", quali cap/floor e swaption.

Poiché il vantaggio del modello risiede nella "semplicità" della dinamica sotto la misura naturale, è prassi effettuare la stima dei suoi parametri su serie storiche di prezzi. Tra le diverse modalità di stima, che forniscono congiuntamente sia i parametri naturali che quelli *risk neutral*, trovano posto gli approcci basati sulla massimizzazione della funzione di verosimiglianza, a sua volta calcolata tramite tecniche di filtraggio (quali il filtro di Kalman o i c.d. *particle filters* [6]).

L'onere computazionale delle procedure di calibrazione può risultare rilevante, in virtù del fatto che le serie storiche utilizzate in calibrazione, tipicamente giornaliere, coinvolgono facilmente decine di migliaia di prezzi, e che la soluzione del problema di ottimo è "appesantita" dalle forti non linearità della funzione di massima verosimiglianza e dal numero dei parametri del modello, non inferiore a dieci, che determinano la presenza di molteplici minimi locali. Pertanto, è rilevante che vi sia disponibilità di formule "chiuse" per il calcolo dei prezzi dei contratti, o, in alternativa, di algoritmi numerici precisi e veloci, in modo che l'algoritmo per la soluzione del problema di ottimo possa esplorare lo spazio dei parametri in modo sufficientemente completo.

Essendo il  $G2^{++}$  un modello affine, esso possiede, per costruzione, formule chiuse per il prezzo di titoli a cedola nulla, mentre non possiede formule chiuse per il calcolo del prezzo delle swaption, in quanto, essendo un modello a due fattori, non è possibile utilizzare il c.d. *Jamshidian trick* (si veda, ad es., [7, p. 194]), efficace nei modelli affini a un fattore.

Recentemente, si sono resi disponibili due nuovi algoritmi per il calcolo delle swaption nel modello  $G2^{++}$ , rispettivamente l'algoritmo proposto da Choi e Shin nel 2016 [3] e quello proposto da Russo e Torri nel 2019 [9].

Il primo si inserisce nel contesto dei modelli di Heath, Jarrow e Morton (HJM) gaussiani e utilizza un approccio, basato sul calcolo dell'aspettativa che fornisce il prezzo della swaption, che riduce il dominio di integrazione a un opportuno sotto-dominio, determinato numericamente, in modo da ottenere una espressione in forma chiusa. L'onere numerico si sposta quindi dalla determinazione del prezzo alla determinazione del dominio di integrazione. L'approccio si presenta robusto dal punto di vista teorico, ma potenzialmente esposto alle eventuali tematiche numeriche della individuazione del sotto-dominio di integrazione. In senso lato, può essere considerato una estensione dell'approccio di Jamshidian in ambito multidimensionale.

Il secondo propone una espressione in forma chiusa, ispirata all'approccio del modello di Black. Benché estremamente plausibile, questo approccio manca di una dimostrazione rigorosa completa e come tale non può essere considerato pienamente affidabile.

Risultando le problematiche dei due approcci di tipo opposto, è interessante valutarne l'efficacia in modo empirico. A posteriori, limitatamente all'esperimento numerico condotto alla data di riferimento del 31/12/2020, i due approcci si sono dimostrati in perfetto accordo, con differenze inferiori al punto base.

Per completezza, le risultanze numeriche sono state confrontate con quelle ottenute con metodi "classici" (metodo Monte Carlo, integrazione per quadrature) e con una approssimazione meno recente e meno precisa [10], ma comunque utilizzata nella pratica finanziaria.

## 2 Swap e swaption

L'obiettivo di questo paragrafo è introdurre in modo *model independent* il *payoff* delle swaption e le principali misure di probabilità utilizzate per la loro valutazione.

### 2.1 Sugli swap

Un contratto *interest-rate swap* (IRS) è un contratto in cui due controparti<sup>1</sup> si scambiano importi alle date di due scadenziari prefissati. I due flussi di importi, rispettivamente  $\mathbf{x}_F/t_F$  e  $\mathbf{y}_V/s_V$  sono denominati, rispettivamente, *gamba fissa* (*fixed leg*) e *gamba variabile* (*floating leg*).

Per la controparte che paga la gamba fissa e riceve la gamba variabile lo swap è detto *payer swap*; viceversa lo swap è detto *receiver swap*.

I due scadenziari:

$$\mathbf{t}_F = (t_0, t_1, \dots, t_m), \quad \mathbf{s}_V = (s_0, s_1, \dots, s_n), \quad (1)$$

fanno riferimento allo stesso intervallo temporale:

$$t_0 = s_0, \quad t_m = s_n, \quad (2)$$

ma hanno periodicità diversa; tipicamente, la gamba fissa paga annualmente, mentre la gamba variabile paga semestralmente o trimestralmente.

Gli importi delle due gambe valgono, rispettivamente:

$$\begin{aligned} x_F(t_0) &= 0, & x_F(t_j) &= N [i_{sw} \cdot (t_j - t_{j-1})], & j &= 1, 2, \dots, m, \\ y_V(s_0) &= 0, & y_V(s_k) &= N [L(s_{k-1}, s_k) \cdot (s_k - s_{k-1})], & k &= 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (3)$$

dove  $N$  è il nominale del contratto,  $L(s, t)$  è il tasso interbancario (LIBOR) sull'orizzonte temporale  $(s, t)$ , e  $i_{sw}$ , detto *tasso swap* è un tasso fisso, stabilito contrattualmente in modo tale che alla data di stipula  $t_s \leq t_0$  il contratto abbia valore nullo:

$$V_V(t_s) = V_F(t_s), \quad (4)$$

dove  $V_V(t_s) = V[t_s; \mathbf{y}_V]$  e  $V_F(t_s) = V[t_s; \mathbf{x}_F]$  sono, rispettivamente, il valore in  $t_s$  della gamba variabile e della gamba fissa dello swap:

$$\begin{aligned} V_V(t_s) &= N [v(t_s, s_0) - v(t_s, s_n)], \\ V_F(t_s) &= N i_{sw} \sum_{j=1}^m v(t_s, t_j)(t_j - t_{j-1}). \end{aligned} \quad (5)$$

*Osservazione.* Nella prassi di mercato, per valutare l'ampiezza degli intervalli temporali  $(t_j - t_{j-1})$  e  $(s_k - s_{k-1})$  che compaiono nella (3), si utilizzano convenzioni di calcolo dei giorni diverse per ciascuna delle due gambe; tipicamente, la gamba fissa usa la convenzione 30/360, mentre quella variabile usa la convenzione ACT/360. ■

<sup>1</sup>qui ed oltre ipotizzate esenti da rischio di credito.

*Osservazione.* Molti libri di testo, per semplicità, trattano gli IRS facendo riferimento ad un unico scadenziario, ovvero assumendo  $\mathbf{t}_F = \mathbf{s}_V = \mathbf{t}$ . In questo caso, è possibile utilizzare la convenzione di indicare le date dello scadenziario unico con  $t_\alpha, t_{\alpha+1}, \dots, t_\beta$ . ■

Per gli IRS di tipo *plain vanilla* si ha  $t_s = t_0$ , di modo che la prima rata della gamba variabile è nota alla data di stipula (mentre le successive sono aleatorie). Diversamente, quando  $t_s < t_0$ , lo swap è detto *forward start*.

Affinché alla data di stipula  $t_s$  valga la (4), il tasso swap  $i_{sw}$  deve soddisfare la condizione:

$$i_{sw} = \frac{v(t_s, s_0) - v(t_s, s_n)}{\sum_{j=1}^m v(t_s, t_j)(t_j - t_{j-1})} := S_{\alpha\beta}(t_s), \quad (6)$$

e pertanto si configura come un *tasso di parità*. Essendo la (6) valida anche per  $t_s < t_0$ ,  $S_{\alpha\beta}(t)$  è spesso denominato tasso swap *forward start*. Nel caso  $t_s = t_0$  la (6) si modifica semplicemente ponendo  $v(t_s, s_0) = 1$ .

*Osservazione.* Si noti che, ai fini della definizione del tasso swap come tasso di parità, nella (6) l'unico scadenziario rilevante è quello della gamba fissa. Tale caratteristica dipende dall'ipotesi di assenza di rischio di credito; in realtà, il valore della gamba variabile dipende (anche) dalla periodicità dei pagamenti (effetto denominato *basis spread*). ■

## 2.2 Sulle swaption

Una swaption europea *plain vanilla* è una opzione che conferisce al detentore il diritto ad entrare in un contratto *interest-rate swap* ad una data futura  $T$ , al tasso swap  $i_{sw}$  fissato contrattualmente alla data di stipula  $t_s$  (di conseguenza, alla data di scadenza della swaption, il valore dello swap può essere sia positivo che negativo, o - al limite - nullo). La swaption è denominata *payer swaption* quando conferisce il diritto ad entrare in un *payer swap*.

*Osservazione.* Si noti che, in questo caso, il tasso swap non è un tasso di parità, ma riveste un ruolo corrispondente a quello dello *strike* in una opzione *plain vanilla* scritta su un titolo azionario. ■

Nella versione *plain vanilla* la swaption conferisce il diritto ad entrare in uno swap a sua volta *plain vanilla*, ovvero si ha che la data di scadenza della swaption  $T$  coincide con la data iniziale  $t_0$  dello scadenziario della gamba fissa dello swap<sup>2</sup>. Diversamente, quando  $t_0 > T$ , la swaption conferisce il diritto ad entrare in uno swap *forward start*.

Nelle prassi di mercato la swaption può concludersi con l'ingresso delle controparti nello swap sottostante (*physical settlement*), eventualmente mediato da una stanza di compensazione (*cleared physical settlement*), o con il pagamento del valore dello swap (*cash settlement*). Il *cash settlement*, in particolare per i mercati europei, possiede alcune varianti, che si differenziano per come viene

<sup>2</sup>più precisamente, la prassi di mercato è  $t_0 = T + 2$  giorni lavorativi.

calcolata la struttura per scadenza dei tassi di interesse alla data di scadenza della swaption, essenzialmente per eliminare possibili ambiguità nel calcolo del valore dello swap a tale data. Una delle modalità è denominata *cash par-yield* o *cash internal rate of return (IRR) settlement* (per i dettagli si veda la (29) più avanti), mentre una ulteriore modalità (introdotta a fine 2018) è detta *collateralised cash price (CCP) settlement*. Le diverse convenzioni sono regolamentate dall'ISDA.

Nel seguito, per semplicità, queste differenze verranno ignorate.

### 2.3 La valutazione delle swaption

Il prezzo di una swaption può essere espresso sotto forma di valore atteso utilizzando una opportuna misura di probabilità “aggiustata per il rischio”. In genere, i prezzi dei contratti finanziari sono espressi utilizzando la misura *risk neutral*  $\mathbb{Q}$ . Nel caso delle swaption è utile fare riferimento ad altre due possibili misure di probabilità, rispettivamente la misura *T-forward*  $\mathbb{T}$ , anche nota come misura *forward risk neutral*, e la misura *forward-swap*  $\mathbb{F}$ . Le tre misure differiscono tra loro per la scelta del numerario. È rilevante notare che l'uso di differenti misure implica semplicemente diverse distribuzioni di probabilità per le sorgenti di incertezza del modello e per le grandezze derivate. Le caratteristiche delle distribuzioni impattano sulla difficoltà di calcolare la aspettativa che fornisce il prezzo; di conseguenza la scelta della misura con cui effettuare la valutazione può rivelarsi più o meno appropriata a seconda del modello prescelto e del contratto in considerazione.

Come noto, sotto opportune ipotesi sulle proprietà dei mercati e degli investitori, il valore  $V(t)$  di un contratto finanziario di tipo europeo può essere espresso scegliendo un contratto di riferimento, il c.d. *numerario*  $N(t)$ , e una corrispondente *misura di martingala*  $\mathbb{M}$ . Data la coppia  $(N_t, \mathbb{M})$ , per definizione di martingala si ha:

$$\frac{V(t)}{N(t)} = \mathbf{E}_t^{\mathbb{M}} \left[ \frac{V(T)}{N(T)} \right], \quad t < T.$$

La misura *risk neutral*  $\mathbb{Q}$  ha come numerario il valore del *money market account*, per il quale  $N(t) = 1$  e  $N(T) = e^{\int_t^T r(u)du}$ , mentre la misura *T-forward* ha come numerario il prezzo di uno zero coupon bond unitario, per il quale  $N(t) = v(t, T)$  e  $N(T) = 1$ . Pertanto:

$$V(t) = \mathbf{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r(u)du} V(T) \right] = v(t, T) \mathbf{E}_t^{\mathbb{T}} [V(T)], \quad t < T.$$

Queste due misure hanno un campo di applicazione più vasto della misura *forward-swap*, che invece è una misura ideata appositamente per facilitare la valutazione delle swaption all'interno di specifici modelli.

### 2.3.1 La valutazione con la misura risk neutral $\mathbb{Q}$

Utilizzando la misura di probabilità *risk neutral*  $\mathbb{Q}$  il prezzo di una payer swaption ad un istante  $t \in [t_s, T]$  è dato dall'espressione:

$$V(t) = \mathbf{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r(u)du} V(T) \right] = \mathbf{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r(u)du} \max \{V_V(T) - V_F(T), 0\} \right], \quad (7)$$

dove  $V_V(T)$  e  $V_F(T)$  sono, rispettivamente, il valore in  $T$  della gamba variabile e della gamba fissa dello swap:

$$\begin{aligned} V_V(T) &= N (v(T, s_0) - v(T, s_n)) = N (v(T, t_0) - v(T, t_n)), \\ V_F(T) &= N i_{sw} \sum_{j=1}^m v(T, t_j)(t_j - t_{j-1}). \end{aligned} \quad (8)$$

Per il modello G2, la aspettativa nella (7) non è esprimibile in forma chiusa<sup>3</sup>.

### 2.3.2 La valutazione con la misura T-forward $\mathbb{T}$

Utilizzando la misura T-forward il prezzo della swaption è dato dall'espressione:

$$V(t) = v(t, T) \mathbf{E}_t^{\mathbb{T}} [V(T)] = v(t, T) \mathbf{E}_t^{\mathbb{T}} \left[ N \max \{V_V(T) - V_F(T), 0\} \right]. \quad (9)$$

Nel caso particolare di una swaption *plain vanilla* (per la quale  $t_0 = T$ ) il valore in  $T$  della gamba variabile è:

$$V_V(T) = N (v(T, t_0) - v(T, t_n)) = N (1 - v(T, t_n)), \quad (10)$$

e il *payoff* a scadenza può essere espresso nel modo seguente:

$$V(T) = N \max \left\{ 1 - \sum_{j=1}^m c_j v(T, t_j), 0 \right\}, \quad c_j = \begin{cases} i_{sw}(t_j - t_{j-1}) & j = 1, \dots, n-1 \\ 1 + i_{sw}(t_j - t_{j-1}) & j = n \end{cases} \quad (11)$$

in modo da configurare la swaption come una opzione *put* di tipo europeo, avente scadenza  $T$  e prezzo d'esercizio  $N$ , scritta su uno titolo obbligazionario, di nozionale  $N$  e tasso cedolare  $i_{sw}$ .

Anche in questo caso, per il modello G2, non esiste una forma chiusa per la aspettativa nella (9).

---

<sup>3</sup>Il concetto di "forma chiusa" è – in realtà – definito in modo non rigoroso e indica il fatto che la soluzione di un problema sia esprimibile con un numero finito di operazioni che a loro volta coinvolgono funzioni appartenenti ad un insieme "convenzionale" predefinito. Sono generalmente escluse operazioni di limite, integrazione e differenziazione ma possono essere incluse funzioni, come la funzione di ripartizione di una normale standard, che sono calcolabili solo numericamente, con algoritmi affermati. In generale, "forma chiusa" può essere inteso come sinonimo di tempi di calcolo ridotti e alta precisione.

### 2.3.3 La valutazione con la misura forward-swap $\mathbb{F}$

Utilizzando la (6), il *payoff* della swaption a scadenza può anche essere espresso come funzione del tasso swap di parità  $S_{\alpha\beta}(T)$ :

$$V(T) = N \left[ \sum_{j=1}^m v(T, t_j)(t_j - t_{j-1}) \right] \max \{ S_{\alpha\beta}(T) - i_{\text{sw}}, 0 \}. \quad (12)$$

La (12) suggerisce di valutare la swaption interpretandola come una opzione call scritta sul tasso swap forward start  $S_{\alpha\beta}(t)$  e usando come misura di martingala equivalente la c.d. misura *forward-swap*  $\mathbb{F}$  (nota anche come *annuity measure*) che ha per numerario:

$$N_{\text{FS}}(t) = \sum_{j=1}^m v(t, t_j)(t_j - t_{j-1}). \quad (13)$$

Pertanto:

$$\frac{V(t)}{N_{\text{FS}}(t)} = \mathbf{E}_t^{\mathbb{F}} \left[ \frac{V(T)}{N_{\text{FS}}(T)} \right] = N \mathbf{E}_t^{\mathbb{F}} \left[ \max \{ S_{\alpha\beta}(T) - i_{\text{sw}}, 0 \} \right], \quad (14)$$

ovvero:

$$V(t) = \underbrace{\left[ \sum_{j=1}^m v(t, t_j)(t_j - t_{j-1}) \right]}_{N_{\text{FS}}(t)} N \mathbf{E}_t^{\mathbb{F}} \left[ \max \{ S_{\alpha\beta}(T) - i_{\text{sw}}, 0 \} \right]. \quad (15)$$

La aspettativa nella (15) non è esprimibile in forma chiusa nel modello G2, mentre è disponibile una soluzione analitica nel c.d. *lognormal forward-swap model* (LSM).

In tale modello si ipotizza che il tasso swap forward  $S_{\alpha\beta}(t)$  evolva, sotto la misura  $\mathbb{F}$ , secondo un moto browniano geometrico privo di deriva:

$$dS_{\alpha\beta}(t) = \sigma_{\text{BLK}} S_{\alpha\beta}(t) dZ(t). \quad (16)$$

*Osservazione.* La presenza di deriva implicherebbe che, nel limite  $t \rightarrow \infty$  il tasso forward swap debba tendere, alternativamente, a zero o a infinito, in contrasto con l'evidenza empirica (sotto la misura naturale  $\mathbb{P}$ ). ■

Sotto tale ipotesi, in analogia al modello di Black e Scholes (con  $r = 0$ ), si ritrova la c.d. *formula di Black*:

$$V(t) = N \left[ \sum_{j=1}^m v(t, t_j)(t_j - t_{j-1}) \right] [S_{\alpha\beta}(t)\Phi(d_1) - i_{\text{sw}}\Phi(d_2)], \quad (17)$$

dove la funzione di ripartizione della normale standard  $\Phi(x)$  è calcolata nei valori  $d_{1/2}$ :

$$d_{1/2} = \frac{\ln \left( \frac{S_{\alpha\beta}(t)}{i_{\text{sw}}} \right) \pm \frac{1}{2} \sigma_{\text{BLK}}^2 (T - t)}{\sigma_{\text{BLK}} \sqrt{T - t}}. \quad (18)$$

*Osservazione.* Si noti che per  $i_{sw} = S_{\alpha\beta}(t)$  il prezzo di un payer swaption è uguale a quello di una receiver swaption (in altri termini, il prezzo della call è uguale a quello della put). In questo caso le swaption sono denominate *at-the-money* (ATM). Le swaption ATM sono, tipicamente, quelle più liquide e i loro prezzi (in particolare quelli degli *straddle*, ovvero di portafogli composti da una call e una put) costituiscono un *benchmark* di mercato. ■

*Osservazione.* In analogia ai prezzi delle opzioni scritte su titoli azionari, è prassi dei mercati riferirsi ai prezzi delle swaption in termini di *volatilità implicita*, con particolare riferimento (prima dell'avvento dei tassi negativi) al modello di Black. In generale, i parametri contrattuali da cui dipende il prezzo di una swaption *plain vanilla* sono tre: il tasso swap  $i_{sw}$ , la scadenza della swaption  $T$  e la scadenza dello swap  $t_n$ . Per le swaption “di riferimento” il tasso swap è fissato dalla condizione di essere ATM, e la volatilità implicita dipende solo dalla (vita residua a) scadenza della swaption (*swaption maturity*) e da quella dello swap (*tenor of the swap*):

$$\sigma_{BLK} = \sigma_{BLK}(T - t, t_n - T). \quad (19)$$

In questo modo viene definita una *superficie di volatilità (implicita)* di riferimento<sup>4</sup>. ■

*Osservazione.* Il confronto tra mercato e modello può essere effettuato in riferimento ai prezzi delle swaption, o - in alternativa - in termini delle corrispondenti volatilità implicite. ■

Un secondo modello molto utilizzato sui mercati, introdotto per una migliore descrizione delle swaption non-ATM, è il c.d. modello SABR, in cui la volatilità del tasso strike  $S_{\alpha\beta}(t)$  è stocastica:

$$\begin{aligned} dS_{\alpha\beta}(t) &= \sigma_{SABR}(t) S_{\alpha\beta}^\gamma(t) dZ_1(t), \\ d\sigma_{SABR}(t) &= v_\sigma \sigma_{SABR}(t) dZ_2(t), \\ dZ_1(t) dZ_2(t) &= \rho dt, \end{aligned} \quad (20)$$

con  $\gamma, v_\sigma$  e  $\rho$  parametri di modello. Il modello SABR non possiede soluzioni in forma chiusa e il suo utilizzo richiede significative accortezze numeriche. Il modello SABR è spesso utilizzato dai principali *provider* di dati finanziari (ad es. Bloomberg) per interpolare la superficie di volatilità implicita in caso di dati mancanti o di opzioni non ATM.

*Osservazione.* Ipotizzando  $v(t, t + \tau) > 0, \forall \tau \geq 0$ , il tasso swap forward start  $S_{\alpha\beta}(t)$  è sicuramente positivo se la struttura per scadenza dei prezzi dei titoli unitari a cedola nulla è monotona decrescente, ovvero se vale il c.d. *postulato del rendimento del denaro*. Diversamente, il tasso swap forward start  $S_{\alpha\beta}(t)$  può assumere valori negativi e non può essere utilizzata l'ipotesi di moto browniano geometrico. ■

---

<sup>4</sup>Si noti che quando l'IRS ha 1 anno di durata, la periodicità della gamba variabile è, generalmente, trimestrale.

### 2.3.4 Modelli di riferimento in regime di tassi negativi

In seguito alla comparsa dei tassi negativi, sono stati proposti modelli alternativi per la dinamica del tasso swap  $S_{\alpha\beta}(t)$ . I tre modelli più utilizzati sono:

1. il c.d. modello di Black traslato (*shifted, displaced*), in cui si ipotizza:

$$dS_{\alpha\beta}(t) = \sigma_{\text{SBLK}} (S_{\alpha\beta}(t) + b) dZ(t), \quad (21)$$

con  $b$  parametro di traslazione; in questo modello il valore di una swaption è:

$$V(t) = N \left[ \sum_{j=1}^m v(t, t_j)(t_j - t_{j-1}) \right] \left[ (S_{\alpha\beta}(t) + b) \Phi(d_1^{(s)}) - (i_{\text{sw}} + b) \Phi(d_2^{(s)}) \right], \quad (22)$$

dove la funzione di ripartizione della normale standard  $\Phi(x)$  è calcolata nei valori  $d_{1/2}^{(s)}$ :

$$d_{1/2}^{(s)} = \frac{\ln \left( \frac{S_{\alpha\beta}(t) + b}{i_{\text{sw}} + b} \right) \pm \frac{1}{2} \sigma_{\text{SBLK}}^2 (T - t)}{\sigma_{\text{SBLK}} \sqrt{T - t}}. \quad (23)$$

2. il c.d. modello normale (o modello di Bachelier), in cui si ipotizza:

$$dS_{\alpha\beta}(t) = \sigma_{\text{N}} dZ(t), \quad (24)$$

ovvero nel quale la distribuzione del tasso strike  $S_{\alpha\beta}(t)$  è una distribuzione normale; in questo modello il valore di una swaption è:

$$V(t) = N \left[ \sum_{j=1}^m v(t, t_j)(t_j - t_{j-1}) \right] \left( \sigma_{\text{N}} \sqrt{T - t} \right) \left[ \Phi(d_1) d_1 + \varphi(d_1) \right], \quad (25)$$

dove  $\varphi(x)$  è la densità di probabilità di una distribuzione normale standard e  $\Phi(x)$  la corrispondente funzione di ripartizione:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(u) du, \quad (26)$$

e  $d_1$  vale:

$$d_1 = \frac{S_{\alpha\beta}(t) - i_{\text{sw}}}{\sigma_{\text{N}} \sqrt{T - t}}. \quad (27)$$

3. il c.d. modello SABR traslato, in cui si ipotizza:

$$\begin{aligned} dS_{\alpha\beta}(t) &= \sigma_{\text{SABR}}(t) \left( S_{\alpha\beta}^\gamma(t) + b \right) dZ_1(t), \\ d\sigma_{\text{SABR}}(t) &= v_\sigma \sigma_{\text{SABR}}(t) dZ_2(t), \\ dZ_1(t) dZ_2(t) &= \rho dt, \end{aligned} \quad (28)$$

con  $b$  parametro di traslazione.

L'attuale modello di riferimento per diversi *provider* di dati finanziari è il modello normale, anche se sono disponibili le volatilità implicite ottenute con gli altri due modelli. Ovviamente, i prezzi delle swaption sono indipendenti dal modello prescelto per calcolare la volatilità implicita.

### 2.3.5 Una nota sulle convenzioni di mercato

Sui mercati, in particolare europei, sono scambiate due tipi di swaption, dette, rispettivamente, *physically settled* e *cash settled*.

Per la prima tipologia è rilevante definire la metodologia per la costruzione della struttura per scadenza dei tassi di interesse di riferimento. Al momento attuale, il mercato utilizza (almeno) due prassi distinte. La prima è la più antica e si basa sui tassi dei contratti IRS, attraverso metodologie di *bootstrap*, che - a loro volta - possono differenziarsi a seconda delle tecniche di interpolazione utilizzate. Per scadenze “brevi” (sotto i 2 anni) è (ulteriore) prassi utilizzare i tassi LIBOR e i contratti a termine invece che i tassi IRS. La seconda, introdotta a seguito della c.d. crisi del credito, si basa sull’uso di prezzi di contratti *overnight indexed swap* (OIS).

Entrambe le prassi differiscono da quella usata in ambito assicurativo dove l’EIOPA utilizza i tassi IRS “corretti” per il rischio di credito attraverso il c.d. *credit risk adjustment* (CRA) e “completati” con l’aggiunta di un valore esogeno del tasso asintotico.

Per la seconda tipologia, il payoff a scadenza della swaption è leggermente diverso da quello nella (12):

$$V(T) = N \left[ \sum_{j=1}^m (1 + S_{\alpha\beta}(T) \Delta t)^{-(t_j - T)} \Delta t \right] \left[ \max \{ S_{\alpha\beta}(T) - i_{sw}, 0 \} \right], \quad (29)$$

con  $\Delta_t = 1/n$  essendo  $n$  il numero delle cedole per anno della gamba fissa. Si noti che, mentre la (12) richiede la conoscenza, in  $T$ , di  $S_{\alpha\beta}(T)$  e della struttura per scadenza dei tassi di interesse alle date  $t_1, \dots, t_m$ , la (29) richiede la sola conoscenza di  $S_{\alpha\beta}(T)$ . Pertanto, l’uso della (29) evita possibili disaccordi tra controparti che adottino diverse metodologie per ricostruire la struttura per scadenza dei tassi di interesse.

### 2.3.6 La replicazione delle swaption

Secondo la formula di Black il valore di una swaption è:

$$\begin{aligned}
 V(t_v) &= N \left[ \sum_{j=1}^m v(t_v, t_j)(t_j - t_{j-1}) \right] \left[ \frac{v(t_v, s_0) - v(t_v, s_n)}{\underbrace{\sum_{j=1}^m v(t_v, t_j)(t_j - t_{j-1})}_{S_{\alpha\beta}}} \Phi(d_1) - i_{sw} \Phi(d_2) \right] \\
 &= N \left\{ [v(t_v, s_0) - v(t_v, s_n)] \Phi(d_1) - \left[ \sum_{j=1}^m v(t_v, t_j)(t_j - t_{j-1}) \right] i_{sw} \Phi(d_2) \right\} \quad (30)
 \end{aligned}$$

La (31) mostra che, in linea di principio, una swaption potrebbe essere replicata con un portafoglio di zero coupon bond (ZCB). Tuttavia, non essendo questi disponibili sul mercato, è più realistico immaginare un portafoglio replicante composto da IRS. Alla data di valutazione  $t_v$  il valore di un payer IRS *forward start*, avente tasso swap  $\kappa$  (diverso dal tasso di parità) è:

$$\begin{aligned}
 V_{IRS}(t_v) &= N \left[ v(t_v, s_0) - v(t_v, s_n) - \kappa \sum_{j=1}^m v(t_v, t_j)(t_j - t_{j-1}) \right], \quad (31) \\
 t_v &< s_0 = t_0 < \dots < s_n = t_m.
 \end{aligned}$$

Un portafoglio composto da una posizione lunga su  $\Delta_1$  IRS con tasso swap  $\kappa_1$  e una posizione corta su  $\Delta_2$  IRS con tasso swap  $\kappa_2$  vale:

$$P(t_v) = N \left\{ (\Delta_1 - \Delta_2) [v(t_v, s_0) - v(t_v, s_n)] + (\Delta_1 \kappa_1 - \Delta_2 \kappa_2) \left[ \sum_{j=1}^m v(t_v, t_j)(t_j - t_{j-1}) \right] \right\}. \quad (32)$$

Affinché tale portafoglio replichi la swaption, confrontando la (31) e la (32), si deve avere:

$$\begin{cases} \Delta_1 - \Delta_2 = \Phi(d_1), \\ \Delta_1 \kappa_1 - \Delta_2 \kappa_2 = i_{sw} \Phi(d_2), \end{cases} \quad (33)$$

e quindi:

$$\Delta_1 = \frac{\kappa_2 \Phi(d_1) - i_{sw} \Phi(d_2)}{\kappa_2 - \kappa_1}, \quad \Delta_2 = \frac{\kappa_1 \Phi(d_1) - i_{sw} \Phi(d_2)}{\kappa_2 - \kappa_1}. \quad (34)$$

*Osservazione.* La (34) mostra che i tassi swap  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  possono essere qualsiasi, con l'accortezza di non avere valori troppo piccoli di  $|\kappa_2 - \kappa_1|$ , per evitare valori di  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$  troppo grandi. ■

*Osservazione.* La (34) mostra che non è possibile avere  $\Delta_1 = \Delta_2$ . ■

Nel modello di Bachelier si ha invece:

$$V(t_v) = N \left[ \sum_{j=1}^m v(t_v, t_j)(t_j - t_{j-1}) \right] \left( \sigma_N \sqrt{T - t_v} \right) [\Phi(d_1) d_1 + \varphi(d_1)] , \quad (35)$$

Anche in questo caso il portafoglio replicante può essere formato da due IRS; confrontando la (35) e la (32), si deve avere:

$$\Delta_1 = \Delta_2, \quad \text{e} \quad \kappa_1 = \left( \sigma_N \sqrt{T - t_v} \right) \Phi(d_1) d_1, \quad \kappa_2 = \left( \sigma_N \sqrt{T - t_v} \right) \varphi(d_1). \quad (36)$$

### 3 Il modello G2<sup>++</sup>

In questo paragrafo si ripercorre la formulazione del modello G2<sup>++</sup>, a partire dal modello di Hull e White a due fattori, fino alla rappresentazione come modello HJM.

#### 3.1 Il modello di Hull e White e il modello G2

Il modello di Hull e White a due fattori è definito sotto la misura *risk-neutral*  $\mathbb{Q}$  dalla seguente coppia di equazioni differenziali stocastiche:

$$\begin{aligned} dr_t &= (\varphi + \varepsilon_t - \alpha_r r_t) dt + \sigma_r dZ_r(t), & r(t_0) &= r_0, \\ d\varepsilon_t &= -\alpha_\varepsilon \varepsilon_t dt + \sigma_\varepsilon dZ_\varepsilon(t), & \varepsilon(t_0) &= 0, \end{aligned} \quad (37)$$

essendo i parametri  $\varphi, \alpha_r, \alpha_\varepsilon, \sigma_r, \sigma_\varepsilon$  a valori positivi. I due moti browniani  $Z_r(t)$  e  $Z_\varepsilon(t)$  sono correlati con coefficiente di correlazione  $\rho \in (-1, 1)$ .

In questa formulazione la costante  $\varphi$  concorre al valore atteso di  $r(t)$  e costituisce l'unico termine puramente deterministico. Al fine di una maggiore corrispondenza con il modello di Vasicek, si può porre

$$\varphi = \alpha_r \cdot \gamma_r. \quad (38)$$

In forma matriciale la dinamica del modello si scrive:

$$d \underbrace{\begin{pmatrix} r(t) \\ \varepsilon(t) \end{pmatrix}}_{:=\chi(t)} = \left[ \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}}_{:=A} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\alpha_r & 1 \\ 0 & -\alpha_\varepsilon \end{pmatrix}}_{:=B} \underbrace{\begin{pmatrix} r(t) \\ \varepsilon(t) \end{pmatrix}}_{:=\chi(t)} \right] dt + \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_r & 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon \end{pmatrix}}_{:=\Sigma_{\text{hw}}} d \underbrace{\begin{pmatrix} Z_r(t) \\ Z_\varepsilon(t) \end{pmatrix}}_{:=\mathbf{Z}_{\text{hw}}(t)}, \quad (39)$$

ovvero

$$d\chi(t) = [A + B\chi(t)] dt + \Sigma_{\text{hw}} d\mathbf{Z}_{\text{hw}}(t). \quad (40)$$

Il modello G2 si ottiene da quello di Hull e White a due fattori in due passaggi.

Il primo passaggio prevede di disaccoppiare le due equazioni differenziali stocastiche. A tal fine è sufficiente introdurre la seguente trasformazione di variabili:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} r(t) \\ u(t) \end{pmatrix} &:= T \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix} &= T^{-1} \begin{pmatrix} r(t) \\ u(t) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (41)$$

con  $T$  matrice  $2 \times 2$ . Infatti, moltiplicando a sinistra per  $T^{-1}$  la (39), si ha:

$$d \underbrace{\begin{pmatrix} r(t) \\ u(t) \end{pmatrix}}_{T^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix}} = \left[ T^{-1} \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{T^{-1} B T}_{:=D} \underbrace{\begin{pmatrix} r(t) \\ u(t) \end{pmatrix}}_{T \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix}} \right] dt + T^{-1} \Sigma_{\text{hw}} d \begin{pmatrix} Z_r(t) \\ Z_\varepsilon(t) \end{pmatrix}. \quad (42)$$

ed è possibile imporre:

$$T^{-1} B T = D = \begin{pmatrix} -\hat{\alpha}_1 & 0 \\ 0 & -\hat{\alpha}_2 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

La (43) mostra che la matrice  $T$  è la matrice che diagonalizza la matrice  $B$ :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \alpha_r - \alpha_\varepsilon \end{pmatrix}, \quad (44)$$

da cui:

$$\begin{pmatrix} r(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) + \tilde{x}_2(t) \\ (\alpha_r - \alpha_\varepsilon)\tilde{x}_2(t) \end{pmatrix}, \quad (45)$$

e

$$T^{-1} \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Analogamente imponendo:

$$\begin{pmatrix} Z_r(t) \\ Z_\varepsilon(t) \end{pmatrix} = T_z \begin{pmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \end{pmatrix}, \quad (47)$$

con  $T_z$  matrice  $2 \times 2$  tale che:

$$T^{-1} \Sigma_{\text{HW}} T_z = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad (48)$$

si ottiene:

$$d \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\hat{\alpha}_1 & 0 \\ 0 & -\hat{\alpha}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix} \right] dt + \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \end{pmatrix} \quad (49)$$

Il secondo passaggio prevede di riassorbire la costante  $\varphi$  in  $\tilde{x}_1(t)$ , ponendo:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) + \phi(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad (50)$$

in modo che si abbia:

$$d \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\hat{\alpha}_1 & 0 \\ 0 & -\hat{\alpha}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (51)$$

che è la dinamica del modello G2. La opportuna funzione  $\phi(t)$  risulta essere:

$$\phi(t) = r_0 e^{-\hat{\alpha}_1(t-t_0)} + \frac{\varphi}{\hat{\alpha}_1} \left( 1 - e^{-\hat{\alpha}_1(t-t_0)} \right). \quad (52)$$

Inoltre

$$r(t) = \phi(t) + x_1(t) + x_2(t), \quad r(t_0) = \phi(t_0) = r_0. \quad (53)$$

*Osservazione.* Il modello di Hull e White a due fattori e il modello G2 sono due diverse parametrizzazioni di un modello stocastico gaussiano a due fattori. Il primo permette una interpretazione finanziaria immediata, mentre il secondo è espresso nella logica dei modelli fattoriali e beneficia di una maggiore semplicità formale. ■

### 3.2 Il perfect fitting

Il passaggio dal modello G2 al modello G2<sup>++</sup> avviene modificando la funzione  $\phi(t)$ . Notando che il fattore di sconto

$$v(t, T) = \mathbf{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r(u) du} \right], \quad (54)$$

può essere ricavato in forma esplicita come prodotto di un termine “deterministico”  $v_\phi(t, T)$  e un termine “stocastico”  $v_x(t, T)$ :

$$v(t, T) = \underbrace{\exp \left[ -\int_t^T \phi(u) du \right]}_{v_\phi(t, T)} \times \underbrace{\exp \left[ -\left( M(t, T) - \frac{1}{2} V(t, T) \right) \right]}_{v_x(t, T)} \quad (55)$$

dove:

$$\begin{aligned} \int_t^T \phi(u) du &= -\frac{1}{\hat{\alpha}_1^2} \left[ e^{-\hat{\alpha}_1(t-t_0)} (\varphi - \hat{\alpha}_1 r_0) (1 - e^{-\hat{\alpha}_1 \tau}) - \hat{\alpha}_1 \varphi \tau \right], \\ M(t, t + \tau) &= \sum_{i=1}^2 \frac{1 - e^{-\hat{\alpha}_i \tau}}{\hat{\alpha}_i} x_i(t), \\ V(t, t + \tau) &= \sum_{i=1}^2 \frac{\sigma_i^2}{\hat{\alpha}_i^2} \left[ \tau + \frac{2}{\hat{\alpha}_i} e^{-\hat{\alpha}_i \tau} - \frac{1}{2\hat{\alpha}_i} e^{-2\hat{\alpha}_i \tau} - \frac{3}{2\hat{\alpha}_i} \right] + \\ &\quad + 2\rho \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2} \left[ \tau - \sum_{i=1}^2 \left( \frac{1 - e^{-\hat{\alpha}_i \tau}}{\hat{\alpha}_i} \right) + \frac{1 - e^{-(\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2) \tau}}{\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2} \right] \end{aligned} \quad (56)$$

essendo  $\tau = T - t$ , per imporre la *perfect fitting* con i fattori di sconto  $v^M(t_0, T)$  osservati sul mercato alla data  $t_0$ :

$$v(t_0, T) = v^M(t_0, T), \quad \forall T \geq t_0, \quad (57)$$

è sufficiente sostituire alla funzione  $\phi(t)$  una nuova funzione  $\phi_M(t)$ , implicitamente definita dalla relazione:

$$v^M(t_0, T) = \underbrace{\exp \left[ -\int_{t_0}^T \phi_M(u) du \right]}_{v_{\phi_M}(t_0, T)} v_x(t_0, T), \quad (58)$$

ovvero:

$$v_{\phi_M}(t_0, T) = \frac{v^M(t_0, T)}{v_x(t_0, T)}. \quad (59)$$

*Osservazione.* Il passaggio dal modello G2 al modello G2<sup>++</sup> elimina dal modello i parametri  $r_0$  e  $\varphi$ , poiché questi compaiono esclusivamente nella espressione di  $v_\phi(t, T)$ . ■

*Osservazione.* Dal punto di vista operativo è generalmente sufficiente conoscere  $v_{\phi_M}(t_0, T)$  utilizzando la (59), senza dover ricavare esplicitamente la dipendenza di  $\phi_M(t)$  da  $t$ . ■

Poiché  $\phi_M(t)$  è una funzione deterministica di  $t$ , si ha:

$$\exp \left[ - \int_t^T \phi_M(u) du \right] = \exp \left[ - \frac{\int_{t_0}^T \phi_M(u) du}{\int_{t_0}^t \phi_M(u) du} \right] = \frac{v^M(t_0, T) v_x(t_0, t)}{v_x(t_0, T) v^M(t_0, t)}, \quad (60)$$

e quindi:

$$v(t, T) = \underbrace{\frac{v^M(t_0, T) v_x(t_0, t)}{v_x(t_0, T) v^M(t_0, t)}}_{v_{\phi_M}(t, T)} v_x(t, T). \quad (61)$$

La (61) indica il fatto che il *perfect fitting* all'istante  $t_0$  determina la componente “deterministica” del fattore di sconto,  $v_{\phi_M}(t, T)$ , a tutte le date successive a  $t_0$ , per le quali, di conseguenza, non è più possibile richiedere il *perfect fitting*.

### 3.3 La distribuzione di $\mathbf{x}(t)$ sotto la misura $\mathbb{Q}$

La dinamica della variabile  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$  nel modello G2<sup>++</sup>

$$d \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\hat{\alpha}_1 & 0 \\ 0 & -\hat{\alpha}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \end{pmatrix}, \quad (62)$$

è un caso particolare di processo di Ornstein–Uhlenbeck bivariato, che possiede soluzione analitica.

Riscrivendo il processo in modo leggermente più generale come:

$$d \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_1 \\ \hat{\gamma}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\hat{\alpha}_1 & 0 \\ 0 & -\hat{\alpha}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \right] dt + \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \end{pmatrix}, \quad (63)$$

si ha che la distribuzione di  $\mathbf{x}(t + \tau)$  ( $\tau \geq 0$ ) condizionata al valore di  $\mathbf{x}(t)$ , è una normale bivariata:

$$\mathbf{x}(t + \tau) \sim N(\boldsymbol{\mu}_x, \Sigma_x), \quad (64)$$

di parametri:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_x &= \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - e^{-\hat{\alpha}_1 \tau}) \hat{\gamma}_1 + e^{-\hat{\alpha}_1 \tau} x_1(t) \\ (1 - e^{-\hat{\alpha}_2 \tau}) \hat{\gamma}_2 + e^{-\hat{\alpha}_2 \tau} x_2(t) \end{pmatrix}, \\ \Sigma_x &= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \frac{1 - e^{-2\hat{\alpha}_1 \tau}}{2\hat{\alpha}_1} & \rho \sigma_1 \sigma_2 \frac{1 - e^{-(\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2) \tau}}{(\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2)} \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 \frac{1 - e^{-(\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2) \tau}}{(\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2)} & \sigma_2^2 \frac{1 - e^{-2\hat{\alpha}_2 \tau}}{2\hat{\alpha}_2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (65)$$

Si noti che:

$$\mathbf{E}_{t_0}^{\mathbb{Q}} [\mathbf{x}(t_0 + \tau)] = \mathbf{0}, \quad (66)$$

in virtù della condizione  $\hat{\gamma}_1 = \hat{\gamma}_2 = x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0$ .

### 3.4 La distribuzione di $\mathbf{x}(t)$ sotto la misura $\mathbb{T}$

Il numerario della misura  $\mathbb{T}$  è il valore di uno zero-coupon bond unitario con scadenza in  $T$ . Pertanto, sotto la misura  $\mathbb{T}$ , il prezzo di un generico contratto europeo  $V(t)$  è dato dalla relazione:

$$\frac{V(t)}{v(t, T)} = \mathbf{E}_t^{\mathbb{T}} \left[ \frac{V(T)}{v(T, T)} \right], \quad (67)$$

ovvero:

$$V(t) = v(t, T) \mathbf{E}_t^{\mathbb{T}} [V(T)]. \quad (68)$$

Sotto la misura  $\mathbb{T}$  la distribuzione della variabile aleatoria  $\mathbf{x}(t)$  si modifica, secondo le specifiche del teorema di Girsanov (si vedano, ad esempio, [7, §3.10] e [2, §2.3]), che governa, in generale, i cambiamenti di misura.

Nel caso specifico la distribuzione di probabilità di  $\mathbf{x}(t)$  rimane una normale bivariata

$$\mathbf{x}(t + \tau) \sim N(\boldsymbol{\mu}_x^T, \Sigma_x^T), \quad (69)$$

che, per  $\hat{\gamma}_1 = \hat{\gamma}_2 = 0$ , ha parametri:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_x^T &= \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\hat{\alpha}_1 \tau} x_1(t) - M_1(t, \tau) \\ e^{-\hat{\alpha}_2 \tau} x_2(t) - M_2(t, \tau) \end{pmatrix}, \\ \Sigma_x^T &= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \frac{1 - e^{-2\hat{\alpha}_1 \tau}}{2\hat{\alpha}_1} & \rho \sigma_1 \sigma_2 \frac{1 - e^{-(\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2) \tau}}{(\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2)} \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 \frac{1 - e^{-(\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2) \tau}}{(\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2)} & \sigma_2^2 \frac{1 - e^{-2\hat{\alpha}_2 \tau}}{2\hat{\alpha}_2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (70)$$

con [2, §4.2.4, eq. 4.19]:

$$\begin{aligned} M_1(t, \tau) &= \left( \frac{\sigma_1^2}{\hat{\alpha}_1^2} + \rho \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2} \right) (1 - e^{-\hat{\alpha}_1 \tau}) - \frac{\sigma_1^2}{2\hat{\alpha}_1^2} (e^{-\hat{\alpha}_1(T-t)} - e^{-\hat{\alpha}_1(T-t+\tau)}) + \\ &\quad - \rho \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\hat{\alpha}_1 (\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2)} (e^{-\hat{\alpha}_2(T-t)} - e^{-\hat{\alpha}_2(T-t) - \hat{\alpha}_1 \tau}), \\ M_2(t, \tau) &= \left( \frac{\sigma_2^2}{\hat{\alpha}_2^2} + \rho \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2} \right) (1 - e^{-\hat{\alpha}_2 \tau}) - \frac{\sigma_2^2}{2\hat{\alpha}_2^2} (e^{-\hat{\alpha}_2(T-t)} - e^{-\hat{\alpha}_2(T-t+\tau)}) + \\ &\quad - \rho \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\hat{\alpha}_2 (\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2)} (e^{-\hat{\alpha}_2(T-t)} - e^{-\hat{\alpha}_2(T-t) - \hat{\alpha}_1 \tau}). \end{aligned} \quad (71)$$

*Osservazione.* Rispetto alla misura  $\mathbb{Q}$ , sotto la misura  $\mathbb{T}$  la distribuzione di  $\mathbf{x}(t)$  ha un valore atteso diverso, mentre la matrice di covarianza tra  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  rimane inalterata. ■

### 3.5 Il modello $G2^{++}$ come modello HJM

Il modello  $G2^{++}$ , anche se non formulato esplicitamente come tale può essere ricondotto a un modello HJM gaussiano.

#### 3.5.1 Sui modelli HJM

In un modello HJM, la variabile “esplicativa” è l’intensità istantanea di interesse<sup>5</sup>  $f(t, T)$  (in notazione compatta  $f_t^T$ ), definita implicitamente dalla relazione:

$$v(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, u) du}. \quad (72)$$

Sotto la misura *risk neutral*  $\mathbb{Q}$ , si ipotizza:

$$\begin{aligned} df(t, T) &= \hat{\alpha}\left(t, T, (f_t^s)_{s \geq t}\right) dt + \sum_{i=1}^n \beta_i\left(t, T, (f_t^s)_{s \geq t}\right) d\hat{Z}_i(t), \\ f(t_0, T) &= f_{\text{MKT}}(t_0, T), \end{aligned} \quad (73)$$

dove i moti browniani  $\hat{Z}_i(t)$  sono tra loro indipendenti e  $f_{\text{MKT}}(t_0, T)$  sono i valori osservati sul mercato.

*Osservazione.* Se i moti browniani non fossero indipendenti, è sufficiente porre:

$$\hat{\mathbf{Z}}(t) = C_L \widehat{\mathbf{W}}(t), \quad (74)$$

dove  $C_L$  è la matrice di Cholesky ottenuta a partire dalla matrice di correlazione di  $\hat{\mathbf{Z}}(t)$ , e  $\widehat{\mathbf{W}}(t)$  sono moti browniani indipendenti. ■

*Osservazione.* Per costruzione, la (73) implica *perfect fitting* all’istante  $t_0$ . ■

*Osservazione.* In generale, la (73) non implica (nè esclude) la markovianità di  $f(t, T)$  e il processo rappresentato nella (73) può non essere un processo di diffusione. ■

La principale caratteristica dei modelli HJM è che la richiesta di assenza di arbitraggio implica una relazione tra la funzione  $\hat{\alpha}\left(t, T, (f_t^s)_{s \geq t}\right)$  e le funzioni  $\beta_i\left(t, T, (f_t^s)_{s \geq t}\right)$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

In particolare, si deve avere:

$$\hat{\alpha}\left(t, T, (f_t^s)_{s \geq t}\right) = \sum_{i=1}^n \beta_i\left(t, T, (f_t^s)_{s \geq t}\right) \int_t^T \beta_i\left(t, u, (f_t^s)_{s \geq t}\right) du. \quad (75)$$

<sup>5</sup>in inglese *instantaneous forward rate* o – gergalmente – *forward rate*, da non confondersi con i tassi a termine, anch’essi indicati come *forward rates*.

Sotto tali ipotesi, si ottiene che per uno ZCB unitario con scadenza in  $T$  si ha<sup>6</sup>:

$$\frac{dv(t, T)}{v(t, T)} = r(t)dt - \underbrace{\sum_{i=1}^n \left[ \int_t^T \beta_i(t, u, (f_t^s)_{s \geq t}) du \right]}_{:= +\sigma_i^T(t, T, (f_t^s)_{s \geq t})} d\widehat{Z}_i(t), \quad v(T, T) = 1. \quad (76)$$

Analogamente, è possibile ricavare la dinamica del tasso spot  $r(t) = f_t^t$ , che, sempre sotto la misura *risk neutral*  $\mathbb{Q}$ , risulta essere:

$$\begin{aligned} dr(t) = & \left\{ \frac{\partial f_{t_0}^t}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t \frac{\partial \beta_i(u, t, (f_u^s)_{s \geq u})}{\partial t} \left[ \int_u^t \beta_i(u, x, (f_u^s)_{s \geq u}) dx \right] du \right. \\ & + \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t \beta_i(u, t, (f_u^s)_{s \geq u})^2 du + \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t \frac{\partial \beta_i(u, t, (f_u^s)_{s \geq u})}{\partial t} d\widehat{Z}_i(u) \left. \right\} dt \\ & + \sum_{i=1}^n \beta_i(t, t, (f_t^s)_{s \geq t}) d\widehat{Z}_i(t) \end{aligned} \quad (77)$$

Per opportune scelte di  $\beta_i(t, T, (f_t^s)_{s \geq t})$  ( $i = 1, \dots, n$ ), la (77) rappresenta un processo di diffusione.

### 3.5.2 La scelta del termine di volatilità

Posto che nei modelli HJM le proprietà del modello dipendono dal termine di volatilità  $\beta(t, T, (f_t^s)_{s \geq t})$ , si pone il tema di quale scelta conduca a un modello gaussiano di tipo markoviano.

Secondo Andersen e Piterbarg (vol. 2 §12.1.1), se vale la condizione di separabilità:

$$\beta(t, T, (f_t^s)_{s \geq t}) = g(t) h(T), \quad (78)$$

con  $g(t)$  matrice  $n \times n$  e  $h(T)$  vettore  $n \times 1$ , allora è possibile identificare una variabile  $n$ -dimensionale  $\mathbf{z}(t)$  tale che:

$$\begin{aligned} f(t, T) &= f(t_0, T) + \Omega(t, T) + h^\top(T) \mathbf{z}(t), \\ r(t) &= f(t_0, t) + \Omega(t, t) + h^\top(t) \mathbf{z}(t), \end{aligned} \quad (79)$$

dove  $\Omega(t, T)$  è una grandezza scalare:

$$\Omega(t, T) = h^\top(T) \int_{t_0}^t g(s)^\top g(s) \int_s^T h(u) du ds, \quad (80)$$

<sup>6</sup>in alcuni testi, ad es. in [7], vi è un segno “+” tra i due termini, perché il segno “-” viene riassorbito nella definizione di  $\sigma_i^T(\cdot)$ .

e  $\mathbf{z}(t) = \int_{t_0}^t g(u)^\top d\widehat{\mathbf{Z}}(u)$  è una martingala<sup>7</sup>:

$$d\mathbf{z}(t) = g^\top(t)d\widehat{\mathbf{Z}}(t), \quad \mathbf{z}(t_0) = 0. \quad (81)$$

*Osservazione.* Se i moti browniani sono correlati si pone:

$$d\mathbf{z}(t) = g^\top(t) C_L d\widehat{\mathbf{W}}(t), \quad \mathbf{z}(t_0) = 0. \quad (82)$$

La (79) è l'equazione che collega i modelli HJM ai modelli fattoriali dotati di termine di *perfect fitting* deterministico; il modello G2<sup>++</sup> appartiene dunque al sottoinsieme dei modelli HJM markoviani.

Tuttavia, nella prassi, invece che utilizzare le variabili  $\mathbf{z}(t)$ , si preferisce utilizzare delle variabili  $\mathbf{x}(t)$ , che siano *mean reverting*. Andersen e Pieterbarg sottolineano che la scelta non è univoca.

La scelta di Andersen e Pieterbarg è di porre:

$$\mathbf{x}(t) = H(t) \int_{t_0}^t g(s)^\top g(s) \int_s^T h(u) du ds + H(t) \mathbf{z}(t). \quad (83)$$

Con tale scelta si ha:

$$r(t) = f(t_0, t) + \sum_{i=1}^n x_i(t). \quad (84)$$

Le variabili  $\mathbf{x}(t)$  soddisfano la seguente equazione differenziale stocastica:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}(t) &= (\Pi(t)\mathbf{1} - \lambda(t)\mathbf{x}(t)) dt + (g(t)H(t))^\top d\widehat{\mathbf{Z}}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = 0, \\ &= \lambda(t) \left( \underbrace{\lambda^{-1}(t)\Pi(t)\mathbf{1} - \mathbf{x}(t)}_{:=\tilde{\gamma}(t)} \right) dt + (g(t)H(t))^\top d\widehat{\mathbf{Z}}(t) \end{aligned} \quad (85)$$

dove  $H(t)$  è una matrice diagonale di dimensione  $n \times n$  con  $\text{diag}(H(t)) = h(t)$ ,  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$  è il vettore identità di dimensione  $n$ , e  $\Pi(t)$  e  $\lambda(t)$  sono matrici  $n \times n$ :

$$\begin{aligned} \Pi(t) &= H(t) \overbrace{\left( \int_{t_0}^t g(s)^\top g(s) ds \right)}^{\mathbf{Var}_{t_0}[\mathbf{z}(t)]} H(t), \\ \lambda(t) &= -\frac{\partial H(t)}{\partial t} H^{-1}(t). \end{aligned} \quad (86)$$

<sup>7</sup>In generale, dato un moto browniano standard  $Z(t)$  e una funzione, sufficientemente regolare  $\sigma(t)$ , si ha:

$$\mathbf{E}_{t_0} \left[ \int_{t_0}^t \sigma(u) dZ(u) \right] = 0, \quad \mathbf{Var}_{t_0} \left[ \int_{t_0}^t \sigma(u) dZ(u) \right] = \int_{t_0}^t \mathbf{E}_{t_0} [\sigma^2(u)] du.$$

*Osservazione.* Dalla (84) si vede che è possibile definire una funzione deterministica  $\varphi_{\text{AP}}(t)$  tale che:

$$r(t) = \varphi_{\text{AP}}(t) + \sum_{i=1}^n x_i(t), \quad (87)$$

con  $\varphi_{\text{AP}}(t) = f(t_0, t)$ . La (83) segue pertanto un criterio di semplicità nei confronti del termine di *perfect fitting*. ■

*Osservazione.* Dal confronto tra la (83) e la (86) si vede che  $\Pi(t)$  è la matrice di covarianza di  $\mathbf{x}(t)$ . ■

Al momento di definire il modello G2<sup>++</sup> la scelta effettuata da Brigo e Mercurio delle variabili  $\mathbf{x}(t)$  è diversa da quella di Andersen e Pieterbarg. Infatti, Brigo e Mercurio definiscono  $\mathbf{x}(t)$  in modo che il valore atteso di lungo periodo  $\hat{\gamma}$  sia nullo:

$$\hat{\gamma}_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{t_0} [x_i(t)] = 0, \quad i = 1, 2. \quad (88)$$

che corrisponde a definire  $\mathbf{x}(t)$  come:

$$\mathbf{x}(t) = H(t)\mathbf{z}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = 0, \quad (89)$$

In questo caso, le variabili  $\mathbf{x}(t)$  soddisfano la seguente equazione differenziale stocastica:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}(t) &= \frac{\partial H(t)}{\partial t} \mathbf{z}(t) dt + H(t) d\mathbf{z}(t) \\ &= - \underbrace{\left( -\frac{\partial H(t)}{\partial t} H^{-1}(t) \right)}_{:=\lambda(t)} \mathbf{x}(t) dt + H(t) g^\top(t) d\hat{\mathbf{Z}}(t) \\ &= -\lambda(t) \mathbf{x}(t) dt + (g(t)H(t))^\top d\hat{\mathbf{Z}}(t). \end{aligned} \quad (90)$$

Coerentemente, Brigo e Mercurio “riassorbono” i termini deterministici dell’aspettativa di  $\mathbf{x}(t)$  nella definizione del termine deterministico  $\varphi(t)$ , che in questo modo risulta essere [2, eq. 4.12]:

$$\varphi(t) = f(t_0, t) + \underbrace{\sum_{i=1}^2 \frac{\sigma_i^2}{2\hat{\alpha}_i^2} \left(1 - e^{-\hat{\alpha}_i(t-t_0)}\right)^2 + \rho \prod_{i=1}^2 \frac{\sigma_i}{\alpha_i} \left(1 - e^{-\hat{\alpha}_i(t-t_0)}\right)}_{\Omega(t,t)}. \quad (91)$$

### 3.5.3 Sul fattore di sconto

Con riferimento alla (85), Andersen e Pieterbarg mostrano che per il fattore di sconto  $v(t, T)$  deve valere la seguente relazione:

$$v(t, T) = \frac{v(t_0, T)}{v(t_0, t)} \exp \left( -\mathbf{G}(t, T)^\top \mathbf{x}(t) - \frac{1}{2} \mathbf{G}(t, T)^\top \Pi(t) \mathbf{G}(t, T) \right), \quad (92)$$

con

$$\mathbf{G}(t, T) = \int_t^T \underbrace{H^{-1}(t)h(u)}_{:=M(t,u)} du = \begin{pmatrix} \frac{1 - e^{-\hat{\alpha}_1(T-t)}}{\hat{\alpha}_1} \\ \frac{1 - e^{-\hat{\alpha}_2(T-t)}}{\hat{\alpha}_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(\tau, \hat{\alpha}_1) \\ B(\tau, \hat{\alpha}_2) \end{pmatrix}. \quad (93)$$

L'espressione del fattore di sconto non viene fornita esplicitamente, ma è agevole da calcolare:

$$v(t, T) = \exp \left( -\int_t^T \varphi_{\text{AP}}(u) du - \mathbf{G}(t, T)^\top \mathbf{x}(t) - \frac{1}{2} \mathbf{G}(t, T)^\top \Pi(t) \mathbf{G}(t, T) \right), \quad (94)$$

Si noti che  $x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0$ ,  $\Pi(t_0) = 0$ , e che  $\mathbf{G}(T, T) = (0, 0)$ , di modo che nei casi limite  $t = t_0$  e  $t = T$  la (99) fornisce i risultati corretti, rispettivamente:

$$v(t=t_0, T) = \exp \left( -\int_{t_0}^T f(t_0, u) du \right), \quad v(t=T, T) = 1. \quad (95)$$

La (92) è particolarmente interessante poiché implica che sotto la misura di probabilità *T-forward* (avente per numerario lo ZCB unitario che scade in  $t$ ) la aspettativa di  $\mathbf{x}(t)$  sia nulla.

Infatti, nel caso bivariato, essendo  $\mathbf{x}(t)$  distribuito secondo una normale, e dato che:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax-by} \varphi(\boldsymbol{\mu}, \Sigma_{xy}) dx dy = \exp \left[ -a\mu_x - b\mu_y + \frac{1}{2}(a, b)\Sigma_{xy} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right], \quad (96)$$

il valore atteso del fattore di sconto è:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{t_0}^\top [v(t, T)] &= \exp \left( -\int_t^T \varphi_{\text{AP}}(u) du \right) \exp \left( -\mathbf{G}(t, T)^\top \mathbf{E}_{t_0}^\top [\mathbf{x}(t)] \right) \\ &= \frac{v(t_0, T)}{v(t_0, t)} \exp \left( -\mathbf{G}(t, T)^\top \mathbf{E}_{t_0}^\top [\mathbf{x}(t)] \right). \end{aligned} \quad (97)$$

La (97) implica che se la aspettativa di  $\mathbf{x}(t)$  è nulla, allora  $v(s, T)/v(s, t)$  è una martingala, ovvero il valore atteso di  $v(t, T)$  coincide con il valore a termine:

$$\mathbf{E}_{t_0}^\top [v(t, T)] = \mathbf{E}_{t_0}^\top \left[ \frac{v(t, T)}{v(t, t)} \right] = \frac{v(t_0, T)}{v(t_0, t)} = v(t_0, t, T). \quad (98)$$

La (92), con la condizione  $\mathbf{E}_{t_0}^T[\mathbf{x}(t)] = 0$ , riveste un ruolo fondamentale nell'algoritmo di Choi e Shin (si veda oltre) per la valutazione delle swaption.

Nella formulazione di Brigo e Mercurio [2, eq. 4.14] l'equivalente della (92) è:

$$v(t, T) = \frac{v(t_0, T)}{v(t_0, t)} \exp \left[ - \sum_{i=1}^2 B(\tau, \hat{\alpha}_i) x_i(t) + \frac{1}{2} (V(t, T) - V(t_0, T) + V(t_0, t)) \right]. \quad (99)$$

dove il termine deterministico all'esponenziale nella (99) differisce da quello della (92) a causa della diversa definizione di  $\varphi(t)$  dei due approcci. In questo caso, si ha infatti:

$$v(t, T) = \exp \left( - \int_t^T \varphi(u) du - \sum_{i=1}^2 B(\tau, \hat{\alpha}_i) x_i(t) + \frac{1}{2} V(t, T) \right), \quad (100)$$

dove  $V(t_0, T) \neq 0$ .

## 4 La valutazione delle swaption

Non essendo disponibili espressioni in forma chiusa per il prezzo delle swaption con il modello  $G2^{++}$ , è necessario utilizzare approcci numerici. Tra questi si distinguono due classi principali: i metodi basati su metodologie di integrazione numerica (metodo Monte Carlo, integrazione per quadrature) e metodi basati sull'uso di approssimazioni (sui processi stocastici, sul dominio di integrazione, ecc.) che permettono di ottenere il prezzo in forma chiusa.

Al fine di calibrare il modello  $G2^{++}$  su serie storiche di prezzi di swaption è necessario che la metodologia impiegata per la valutazione sia sufficientemente rapida. In genere, i metodi di integrazione numerica non godono di questa proprietà ed è quindi rilevante considerare l'uso di approssimazioni, purché sufficientemente precise. In generale, il livello di precisione delle approssimazioni può dipendere da molteplici fattori quali la scadenza della swaption, la durata dello swap sottostante, il livello dei tassi di interesse, ecc.

La tabella 1 riporta una sintesi delle caratteristiche di sei diverse tecniche di calcolo considerate. Tra queste, le prime tre sono basate su tecniche “classiche” di integrazione numerica e, pertanto, “lente”. In particolare, sulla piattaforma utilizzata (un PC con CPU Intel i7-6920HQ, 2,9 GHz, 4 core, SO Windows 10) il metodo Monte Carlo (con un opportuno numero di simulazioni) richiede diversi minuti per ciascuna valutazione, mentre le quadrature richiedono circa una decina di secondi. I tempi di calcolo sono indicativi, in quanto i risultati sono stati ottenuti utilizzando il linguaggio R, che, benché fortemente basato su un substrato in C, non è un linguaggio “compilato”.

Le seconde tre sono tecniche veloci, con tempi di calcolo dell'ordine dei centesimi/decimi di secondo, basate su diverse approssimazioni<sup>8</sup>, di cui la prima – probabilmente una delle più diffuse sul mercato – si è dimostrata imprecisa per swaption con valori “elevati” (superiori ai 10 anni) della scadenza.

Le ultime due, quelle di maggiore interesse per il presente lavoro, si sono dimostrate altrettanto valide; la prima è leggermente preferibile in termini di velocità, mentre la seconda è preferibile in termini di robustezza numerica. In particolare l'approccio di Choi e Shin ha sporadicamente mostrato sensibilità (facilmente gestibili con opportune “protezioni” numeriche) ai valori di innesco della procedura di ottimo per la determinazione del dominio di integrazione

I dettagli delle diverse tecniche sono esposti nei prossimi paragrafi.

tecnica	misura	velocità	precisione	problematiche
Monte Carlo	$\mathbb{Q}$	molto lento	buona	nessuna
quadratura 2d	$\mathbb{T}$	lento	buona	nessuna
quadratura 1d	$\mathbb{T}$	lento	buona	possibili
appros. di SP	$\mathbb{F}$	molto veloce	limitata	nessuna
appros. di CS	$\mathbb{T}$	molto veloce	buona	sensibile a innesco
approccio di RT	$\mathbb{T}$	veloce	buona	nessuna

Tabella 1: Tabella riassuntiva delle diverse tecniche numeriche indagate.

<sup>8</sup>in realtà la terza è una formula “chiusa” nella quale compare una grandezza che deve essere calcolata tramite integrazione numerica.

## 4.1 La valutazione con il Monte Carlo

Le eqq. (7) e (8) permettono di valutare il prezzo di una swaption utilizzando il metodo Monte Carlo. A tal fine è necessario:

1. fissare il numero  $N_{\text{SIM}}$  di traiettorie da simulare;
2. simulare  $N_{\text{SIM}}$  traiettorie di  $r(t) = \varphi(t) + x_1(t) + x_2(t)$  dall'istante di valutazione  $t_0$  alla scadenza della swaption  $T$ ; le simulazioni devono essere effettuate partizionando l'intervallo  $[t_0, T]$  tramite l'insieme di date

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T,$$

in modo da poter calcolare il deflattore, che compare nella (7), applicando una regola di quadratura:

$$e^{-\int_{t_0}^T r(u)du} \simeq \exp \left[ -\sum_{k=1}^n \omega_k r(t_k) \right], \quad (101)$$

con  $\omega_k$  opportuno insieme di pesi (dipendente dalla regola di quadratura utilizzata);

3. calcolare, per ciascuna traiettoria di  $r(t)$ , la struttura per scadenza dei tassi di interesse in vigore in  $T$ , in particolare per le scadenze della gamba fissa, in modo da calcolare, utilizzando la (8), i valori della gamba fissa e della gamba variabile dello swap in  $T$ ;
4. calcolare, per ciascuna traiettoria di  $r(t)$  il prodotto tra *payoff* della swaption e deflattore;
5. effettuare la media aritmetica semplice dei risultati ottenuti al punto precedente.

La tecnica Monte Carlo è semplice, e permette di stimare l'errore numerico corrispondente, ma non è adatta ad essere utilizzata all'interno di una procedura di ottimizzazione complessa poiché il numero di simulazioni richieste per raggiungere precisioni adeguate comporta, in genere, tempi di calcolo eccessivi.

## 4.2 Le valutazioni per quadrature

La valutazione per quadratura è particolarmente agevole utilizzando la misura *T-forward*, per la quale:

$$\begin{aligned}
V(t_0) &= v(t_0, T) \mathbf{E}_t^\mathbb{T} [V(T)] \\
&= v(t_0, T) \mathbf{E}_t^\mathbb{T} \left[ N \max \{V_V(T) - V_F(T), 0\} \right] \\
&= v(t_0, T) \int_{\Omega_{\mathbf{x}}} N \max \{V_V(T) - V_F(T), 0\} f^\mathbb{T}(\mathbf{x}_T) d\mathbf{x}_T \\
&= v(t_0, T) \int_{\Omega_{\mathbf{x}}} N \max \left\{ 1 - \sum_{j=1}^m c_j v(T, t_j), 0 \right\} f^\mathbb{T}(\mathbf{x}_T) d\mathbf{x}_T
\end{aligned} \tag{102}$$

dove  $\mathbf{x}_t \in \Omega_{\mathbf{x}}$  è il vettore contenente i valori all'istante  $t$  delle sorgenti di incertezza del modello, e  $f^\mathbb{T}(\mathbf{x}_t)$  è la corrispondente funzione di densità secondo la misura *T-forward*.

Nella (102), il termine  $v(t, T)$  può essere posto identico al valore osservato sul mercato:

$$v(t_0, T) = v^{\text{MKT}}(t_0, T), \tag{103}$$

mentre il termine  $v(T, t_j)$  deve essere calcolato utilizzando il modello:

$$v(T, t_j) = v(\mathbf{x}_T, T, t_j).$$

Per modelli con numero di sorgenti di incertezza relativamente “piccolo” quali il modello G2, l'integrale nella (102) può essere calcolato con una delle tecniche “classiche” di quadratura, di Newton o di Gauss (si veda, ad. esempio, [8, §9]), avendo opportunamente troncato l'intervallo di integrazione.

Nel caso del modello G2<sup>++</sup> l'integrazione va effettuata sulla variabile aleatoria  $\mathbf{x}_T = (x_1(T), x_2(T)) \in \mathbb{R}^2$ , per la quale

$$f^\mathbb{T}(\mathbf{x}_T) \sim N(\boldsymbol{\mu}_T^\mathbb{T}, \Sigma_T^\mathbb{T}), \tag{104}$$

è la densità di probabilità di una distribuzione normale bivariata di parametri noti.

*Osservazione.* Brigo e Mercurio mostrano [2, § 4.2.4, p. 158] come, per il modello G2<sup>++</sup>, l'integrale (bidimensionale) nella (102) possa essere ridotto ad un integrale unidimensionale. Tuttavia le espressioni fornite nel testo sono valide solo nell'ipotesi  $x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0$ ; in caso contrario vanno estese con opportune modifiche. ■

### 4.3 La approssimazione di Schrager e Pelsser

L'approccio di Schrager e Pelsser [10] è utilizzabile nel contesto dei modelli fattoriali (sia gaussiani che non) ed utilizza la misura *forward-swap*  $\mathbb{F}$ , di modo che:

$$V(t_0) = \left[ \sum_{j=\alpha+1}^{\beta} v(t_0, t_j)(t_j - t_{j-1}) \right] N \mathbf{E}_t^{\mathbb{F}} \left[ \max \{ S_{\alpha\beta}(T) - i_{sw}, 0 \} \right]. \quad (105)$$

Per calcolare l'aspettativa nella (105) gli autori utilizzano una approssimazione della distribuzione del tasso swap di parità  $S_{\alpha\beta}(T)$ . La distribuzione di  $S_{\alpha\beta}(T)$  è ottenuta risolvendo l'equazione differenziale stocastica che descrive la dinamica di  $S_{\alpha\beta}(T)$ , avendo sostituito ai valori futuri di alcune grandezze – in particolare le variabili aleatorie che, sotto la misura  $\mathbb{F}$ , sono martingale a bassa variabilità (LVM, *low-variance martingales*) – il corrispondente valore in  $t_0$ .

Per modelli di tipo gaussiano questo approccio conduce ad una distribuzione normale per  $S_{\alpha\beta}(T)$ .

*Osservazione.* Storicamente, l'approccio di Schrager e Pelsser segue una prassi introdotta nell'ambito dei modelli di tipo LIBOR Market Model per la valutazione delle swaption. ■

Gli autori sostengono che la precisione relativa dell'approssimazione è dell'ordine di qualche percento, ma non discutono come la precisione varia in funzione della scadenza della swaption  $T$  e di quella dello swap  $t_\beta$ ; inoltre si limitano a esempi numerici in cui  $T \leq 10$  anni e  $t_\beta \leq 5$  anni. Le analisi effettuate nel contesto del modello  $G2^{++}$  concordano con questi risultati, ma mostrano anche un significativo deterioramento per valori più elevati, sia di  $T$  che di  $t_\beta$ , con precisione che “decade” al livello del 35% per  $T = t_\beta = 20$  anni.

Per completezza, si riporta qui l'espressione approssimata del prezzo della swaption per il modello  $G2^{++}$ .

Sotto la misura *risk neutral*  $\mathbb{Q}$ , si abbia:

$$r(t) = \varphi(t) + \sum_{i=1}^2 x_i(t), \quad (106)$$

$$dx_i(t) = -\hat{\alpha}_i x_i(t) dt + \sigma_i dZ_i(t), \quad x_i(t_0) = 0, \quad i = 1, 2,$$

dove i due moti browniani  $Z_1(t)$  e  $Z_2(t)$  sono correlati con matrice di correlazione  $\Sigma_z$ . Sotto tali ipotesi il prezzo in  $t = t_0 = 0$  di una swaption, con scadenza  $T$  e tasso strike  $i_{sw}$ , è<sup>9</sup>:

$$V(t_0) \simeq N \frac{\sigma_v}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\sum_{k=\alpha+1}^{\beta} v(t_0, t_k)(t_k - t_{k-1})}_{N_{FS}(t_0)}, \quad (107)$$

<sup>9</sup>Si vedano l'appendice dell'articolo di Schrager e Pelsser e, a testimonianza dell'uso nel mercato assicurativo italiano [5, §3]

dove:

$$\sigma_v^2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sigma_i \sigma_j (\Sigma_z)_{ij} A_i A_j \frac{e^{(\hat{\alpha}_i + \hat{\alpha}_j)T} - 1}{\hat{\alpha}_i + \hat{\alpha}_j}, \quad (108)$$

essendo  $\Sigma_z$  la matrice di correlazione tra i due moti browniani e:

$$A_i = e^{-\hat{\alpha}_i T} \frac{v(t_0, T)}{N_{FS}(t_0)} - e^{-\hat{\alpha}_i t_\beta} \frac{v(t_0, t_\beta)}{N_{FS}(t_0)} - i_{sw} \sum_{k=\alpha+1}^{\beta} e^{-\hat{\alpha}_i t_k} \frac{v(t_0, t_k) (t_k - t_{k-1})}{N_{FS}(t_0)}. \quad (109)$$

*Osservazione.* Dalla (107) si vede che il valore della swaption dipende solo dai valori dei fattori di sconto (osservati) alla data di valutazione e dai parametri (*risk neutral*) del modello. È dunque una approssimazione che garantisce il *perfect fitting* della struttura per scadenza dei tassi di interesse alla data di valutazione. Inoltre è priva di difficoltà d'uso poiché coinvolge solo operazioni semplici. ■

*Osservazione.* Si noti che nella (107) non compaiono i valori di  $x_1(t_0)$  e di  $x_2(t_0)$ , che, anche in questo caso, sono stati ipotizzati nulli. ■

#### 4.4 La approssimazione di Choi e Shin

L'approccio di Choi e Shin [3], che riprende un precedente lavoro di Singleton e Umantsev [11], è utilizzabile nel contesto dei modelli di tipo gaussiano ed è basato sull'uso della misura  $\mathbb{T}$ -forward. Per il calcolo del prezzo della swaption gli autori utilizzano una approssimazione del dominio di integrazione ideata in modo che l'integrale possa essere calcolato in modo analitico.

L'approssimazione sfrutta il formalismo dei modelli HJM, e, in particolare, una formulazione in cui la sorgente di incertezza  $\mathbf{x}(t)$  è una martingala sotto la misura  $\mathbb{T}$ .

In particolare, si ha:

$$r(t) = f^M(t_0, t) + x_1(t) + x_2(t), \quad (110)$$

Il prezzo di una swaption risulta essere:

$$V(t) \simeq N \sum_{k=\alpha}^{\beta} x_k v(t, t_k) \Phi \left( -(\mathbf{a}(T, t_k) + z_T^*)^\top \cdot e_\perp^{(1)} \right), \quad (111)$$

dove  $\Phi(x)$  è la funzione di ripartizione della normale standard,  $\mathbf{a}(T, t_k)$  è una funzione dei parametri (*risk neutral*) del modello,  $z_T^*$  è un opportuno punto del piano  $(x_1(T), x_2(T))$  e  $e_\perp^{(1)}$  un opportuno versore su tale piano (si veda oltre per i dettagli). Il punto  $z_T^*$  e il versore  $e_\perp^{(1)}$  servono per identificare la porzione di piano  $(x_1(T), x_2(T))$  a cui restringere l'aspettativa che fornisce il prezzo della swaption e hanno una interpretazione geometrica semplice (si veda oltre per i dettagli).

L'uso della (111) richiede di aver determinato preliminarmente  $z_T^*$  e  $e_\perp^{(1)}$ , utilizzando una procedura di ottimizzazione che, quando converge, si è rivelata estremamente rapida. Di conseguenza, l'algoritmo di Choi e Shin è meno robusto di quello di Schrager e Pelsser, ma altrettanto veloce e – di fatto – molto più accurato.

*Osservazione.* Si noti che, come l'approssimazione di Schrager e Pelsser, anche l'approssimazione di Choi e Shin utilizza la struttura per scadenza dei tassi di interesse osservati alla data di valutazione. ■

## 4.5 L'algoritmo di Choi e Shin

L'algoritmo di Choi e Shin utilizza la scelta di  $\mathbf{x}(t)$  di Andersen e Pieterbarg, descritta precedentemente. Il primo passo dell'algoritmo è di utilizzare la decomposizione di Cholesky della matrice di covarianza di  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\Pi(t) = C_\pi(t)C_\pi^\top(t)$ , per definire una nuova variabile  $\mathbf{z}(t)$ , implicitamente definita dalla relazione:

$$\mathbf{x}(t) = C_\pi(t)\mathbf{z}(t). \quad (112)$$

Si noti che la matrice di covarianza di  $\mathbf{z}(t)$  è la matrice identità, infatti:

$$\mathbf{Var} [\mathbf{x}(t)] = C_\pi(t) \mathbf{Var} [\mathbf{z}(t)] C_\pi^\top(t) = C_\pi(t) \mathbf{I} C_\pi^\top(t) = \Pi(t). \quad (113)$$

Inoltre, poiché sotto la misura *T-forward* la aspettativa di  $\mathbf{x}(T)$  è nulla, anche quella di  $\mathbf{z}(T)$  è nulla:

$$\mathbf{E}_{t_0}^\mathbb{T} [\mathbf{z}(T)] = 0. \quad (114)$$

A seguito di tale cambiamento di variabili (di fatto una standardizzazione) il fattore di sconto  $v(t, s)$  è ora funzione di  $\mathbf{z}(t)$  invece che di  $\mathbf{x}(t)$ :

$$v(t, s) = \frac{v(t_0, s)}{v(t_0, t)} \exp \left[ -\mathbf{a}^\top(t, s)\mathbf{z}(t) - \frac{1}{2} |\mathbf{a}(t, s)|^2 \right], \quad (115)$$

con:

$$\mathbf{a}(t, s) = C_\pi^\top \mathbf{G}(t, s). \quad (116)$$

Il secondo passo dell'algoritmo è scrivere il prezzo dello swap come funzione di  $\mathbf{z}(T)$ . Alla scadenza  $T$  di una payer swaption, il prezzo dello swap,  $V_{\text{IRS}}(\mathbf{z}_T)$ , è:

$$\begin{aligned} V_{\text{IRS}}(\mathbf{z}_T) &= N \left\{ \underbrace{v(T, t_\alpha) - v(T, t_\beta)}_{V_v(T)} - \overbrace{\sum_{k=\alpha+1}^{\beta} v(T, t_k) i_K (t_k - t_{k-1})}^{V_f(T)} \right\} \\ &= N \sum_{k=\alpha}^{\beta} x_k v(T, t_k) \\ &= N \frac{1}{v(t_0, T)} \sum_{k=\alpha}^{\beta} x_k v(t_0, t_k) \exp \left[ -\mathbf{a}^\top(T, t_k)\mathbf{z}(T) - \frac{1}{2} |\mathbf{a}(T, t_k)|^2 \right]. \end{aligned} \quad (117)$$

essendo  $\mathbf{x}/t = (1, -i_K \Delta t_{\alpha+1}, \dots, -i_K \Delta t_{\beta-1}, -1 - i_K \Delta t_\beta) / (t_\alpha, t_{\alpha+1}, \dots, t_{\beta-1}, t_\beta)$  il flusso di importi generato dallo swap.

Il terzo passo dell'algoritmo è di scrivere il prezzo della swaption, alla data di valutazione  $t \in [t_0, T]$ , sotto la misura *T-forward*  $\mathbb{T}$ :

$$V(t) = v(t, T) \mathbf{E}_t^\mathbb{T} \left[ \underbrace{\max\{V_{\text{IRS}}(\mathbf{z}_T), 0\}}_{V(T, \mathbf{z}_T)} \right] = v(t, T) \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} V(T, \mathbf{z}_T) \varphi(\mathbf{0}, \mathbf{I}) d\mathbf{z}_T. \quad (118)$$

Il quarto passo dell'algoritmo è quello di approssimare il dominio di integrazione nella (118) in modo che l'integrale abbia soluzione analitica. Siano  $\Omega_v$  e  $\partial\Omega_v$ , rispettivamente, la regione dei valori di  $\mathbf{z}(T)$  per cui la swaption è *in the money* e la frontiera di tale regione:

$$\Omega_v = \{\mathbf{z}(T) : V(T, \mathbf{z}_T) > 0\}, \quad \partial\Omega_v = \{\mathbf{z}(T) : V(T, \mathbf{z}_T) = 0\}. \quad (119)$$

L'integrale nella (118) può essere ristretto a  $\Omega_v$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} V(T, \mathbf{z}_T) \varphi(\mathbf{0}, \mathbf{1}) d\mathbf{z}_T = \int_{\Omega_v} V(T, \mathbf{z}_T) \varphi(\mathbf{0}, \mathbf{1}) d\mathbf{z}_T. \quad (120)$$

Choi e Shin definiscono  $\mathbf{z}^*(T)$  il punto della frontiera a densità di probabilità massima. In tale punto si consideri l'iperpiano tangente a  $\partial\Omega_v$ , di modo che il versore perpendicolare a tale piano è:

$$\mathbf{e}_{\perp}^{(1)} = \frac{\nabla V(T, \mathbf{z}_T)}{|\nabla V(T, \mathbf{z}_T)|} \Big|_{\mathbf{z}(T)=\mathbf{z}^*(T)}, \quad |\mathbf{e}_{\perp}^{(1)}| = 1. \quad (121)$$

Poiché  $\mathbf{z}(T)$  è distribuito secondo una normale multivariata, centrata nell'origine, il punto  $\mathbf{z}^*(T)$  è il punto di  $\partial\Omega_v$  che ha distanza minima  $d_z = |\mathbf{z}(T) - \mathbf{0}|$  dall'origine; per tale motivo il vettore di coordinate  $\mathbf{z}^*(T)$  (il vettore che congiunge l'origine con  $\mathbf{z}^*(T)$ ) deve essere anch'esso normale all'iperpiano tangente, e quindi:

$$\mathbf{z}^*(T) = d^* \mathbf{e}_{\perp}^{(1)}, \quad V(T, \mathbf{z}^*(T)) = 0. \quad (122)$$

Immaginando di aver determinato  $\mathbf{z}^*(T)$  e  $\mathbf{e}_{\perp}^{(1)}$ , è possibile definire un nuovo sistema di coordinate ortonormali  $\mathbf{e}_{\perp}$ :

$$\mathbf{e}_{\perp} = \left( \mathbf{e}_{\perp}^{(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\perp}^{(d)} \right)$$

tramite una rotazione del sistema di coordinate:

$$\mathbf{z}(T) = \sum_{k=1}^d y_k(T) \mathbf{e}_{\perp}^{(k)}, \quad (123)$$

per la quale il primo dei nuovi versori,  $\mathbf{e}_{\perp}^{(1)}$  è quello perpendicolare all'iperpiano tangente e gli altri sono scelti in modo qualsiasi purché il sistema di assi rimanga ortonormale (come si vedrà nel seguito tale scelta è ininfluente). Nel nuovo sistema di coordinate la variabile  $\mathbf{y}(T) = (y_1(T), \dots, y_d(T))$  è anch'essa una variabile normale standard:  $\mathbf{y}(T) \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ .

La rotazione di coordinate comporta che il prezzo dello ZCB unitario sia ora:

$$v(t, s) = \frac{v(t_0, s)}{v(t_0, t)} \exp \left[ -\mathbf{b}^{\top}(t, s) \mathbf{y}(t) - \frac{1}{2} |\mathbf{b}(t, s)|^2 \right], \quad (124)$$

dove:

$$\mathbf{a}_k(t, s) = Q \mathbf{b}_k(t, s), \quad Q := \left[ \mathbf{e}_{\perp}^{(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\perp}^{(d)} \right]. \quad (125)$$

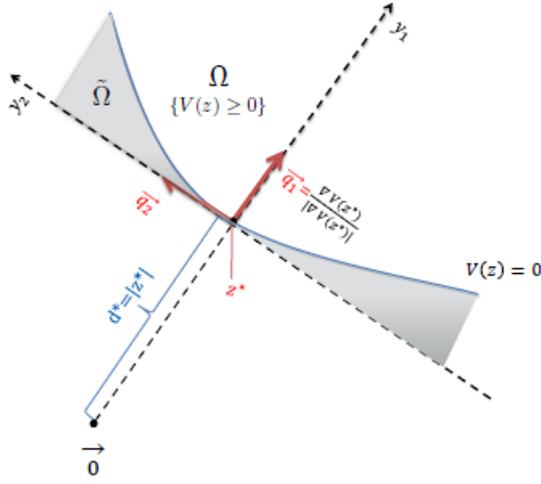


FIGURE 1. Schematic of the hyperplane approximation method. The domain of state variables,  $\Omega$ , includes the area where the swaption payoff is in the money. We approximate the boundary of  $\Omega$ ,  $\partial\Omega$ , as a hyperplane tangent ( $y_1 = 0$ ) to the point  $\mathbf{z}^*$  where the probability density is maximal on  $\partial\Omega$  and integrate the payoff over the domain above the hyperplane ( $y_1 \geq 0$ ). Therefore, the integration over the shaded area is incorrectly added to our approximation. However, the error is extremely small, as the swaption payoff is close to zero, and the probability density is small because of the choice of the tangent point,  $\mathbf{z}^*$ .

Figura 1: Vista schematica dell'approssimazione di Choi e Shin (tratto da [?]).

Il nuovo dominio di integrazione  $\tilde{\Omega}_v$  proposto dagli autori (vedi fig. 1) è la regione di  $\mathbb{R}^d$  dal lato dell'iperpiano in cui la swaption è *in the money*:

$$\tilde{\Omega}_v = \left\{ \mathbf{z}(T) : (e_{\perp}^{(1)})^{\top} \cdot (\mathbf{z}(T) - \mathbf{z}^*(T)) \geq 0 \right\} = \left\{ \mathbf{y}(T) : y_1(T) \geq d^* \right\}. \quad (126)$$

Di conseguenza il prezzo della swaption diventa:

$$V(t) \simeq v(t, T) \int_{\tilde{\Omega}_v} V(T, \mathbf{z}_T) \varphi(\mathbf{0}, \mathbb{1}) d\mathbf{z}_T = v(t, T) \int_{\tilde{\Omega}_v} V(T, \mathbf{y}_T) \varphi(\mathbf{0}, \mathbb{1}) d\mathbf{y}_T. \quad (127)$$

Esplicitando l'espressione di  $V(T, \mathbf{y}_T)$  si ha:

$$V(t) = N \frac{v(t, T)}{v(t_0, T)} \sum_{k=\alpha}^{\beta} x_k v(t_0, t_k) \int_{d^*}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathbf{b}^{\top}(T, t_k) \mathbf{y}(t) - \frac{1}{2} |\mathbf{b}(T, t_k)|^2} \varphi(\mathbf{0}, \mathbb{1}) d\mathbf{y}(T). \quad (128)$$

L'integrale nella (128) si semplifica grazie alla relazione notevole:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-b x - \frac{1}{2} b^2} \varphi(0, 1) dx = 1, \quad (129)$$

con  $b$  costante qualsiasi.

Le figure 2 e 3 mostrano, rispettivamente, il prezzo della swaption  $V(\mathbf{z}_T)$  e il valore della funzione integranda  $V(\mathbf{z}_T) \varphi(\mathbf{0}, \mathbb{1})$  nel piano  $(z_1(T), z_2(T))$  per una swaption con 5 anni di vita residua a scadenza scritta su uno swap di 5 anni di durata, alla data di valutazione del 31/12/2020.

Pertanto, con l'ulteriore semplificazione  $t = t_0$  (data di valutazione coincidente con la data di osservazione della struttura per scadenza dei tassi di interesse) si ha:

$$\begin{aligned}
V(t_0) &= N \sum_{k=\alpha}^{\beta} x_k v(t_0, t_k) \int_{d^*}^{\infty} e^{-b_1(T, t_k) y_1(T) - \frac{1}{2} b_1^2(T, t_k)} \varphi_1(0, 1) dy_1(T) \\
&= N \sum_{k=\alpha}^{\beta} x_k v(t_0, t_k) \Phi(-b_1(T, t_k) - d^*) \\
&= N \sum_{k=\alpha}^{\beta} x_k v(t_0, t_k) \Phi\left(-(\mathbf{a}(T, t_k) + \mathbf{z}_T^*)^\top \cdot \mathbf{e}_\perp^{(1)}\right)
\end{aligned} \tag{130}$$

dove  $\Phi(x)$  è la funzione di ripartizione della normale standard.

La (130) è una espressione in forma chiusa del prezzo della swaption, estremamente rapida da calcolare. È ragionevole attendersi che l'approssimazione sia particolarmente buona poiché:

1. nei pressi della frontiera  $\delta\Omega_v$  il prezzo dello swap è prossimo a zero;
2. più ci si allontana da  $\mathbf{z}^*$ , più la densità di probabilità diventa piccola.

Unico requisito per l'uso della (130) è di aver determinato  $\mathbf{z}^*(T)$  e  $\mathbf{e}_\perp^{(1)}$ , che vanno determinati per via numerica.

#### 4.5.1 La determinazione di $\mathbf{z}^*(T)$

Gli autori suggeriscono l'applicazione del metodo della discesa a gradiente: fissato un punto iniziale  $\mathbf{z}_T^{(0)}$  si procede iterativamente:

$$\mathbf{z}_T^{(n+1)} = \mathbf{z}_T^{(n)} - \underbrace{\frac{V(T, \mathbf{z}_T^{(n)})}{|V(T, \mathbf{z}_T^{(n)})|^2}}_{\kappa_n} \nabla V\left(T, \mathbf{z}_T^{(n)}\right), \quad n = 0, 1, \dots \tag{131}$$

verso il minimo di  $V(T, \mathbf{z}_T)$ , accoppiando al passo precedente la proiezione di  $\mathbf{z}_T^{(n+1)}$  nella direzione del gradiente:

$$\mathbf{z}_T^{(n+1)} \rightarrow \mathbf{z}_T^{(n+1)} = \frac{\nabla V\left(T, \mathbf{z}_T^{(n+1)}\right)^\top \cdot \mathbf{z}_T^{(n+1)}}{\left|\nabla V\left(T, \mathbf{z}_T^{(n+1)}\right)\right|^2} \nabla V\left(T, \mathbf{z}_T^{(n+1)}\right), \tag{132}$$

e arrestando l'algoritmo quando ci si trova sufficientemente vicini alla frontiera:

$$|V(T, \mathbf{z}_T)| < \varepsilon, \tag{133}$$

con  $\varepsilon > 0$  costante "piccola". Si noti che il gradiente  $\nabla V(\mathbf{z}(t))$  è noto in forma analitica. Nella implementazione numerica si è preferito utilizzare  $|V_{\text{IRS}}(\mathbf{z}(t))|$  invece che  $V(\mathbf{z}(t))$ . Come riferito dagli autori, la convergenza dell'algoritmo è estremamente rapida (meno di 10 iterazioni per  $\varepsilon = 10^{-13}$ ).

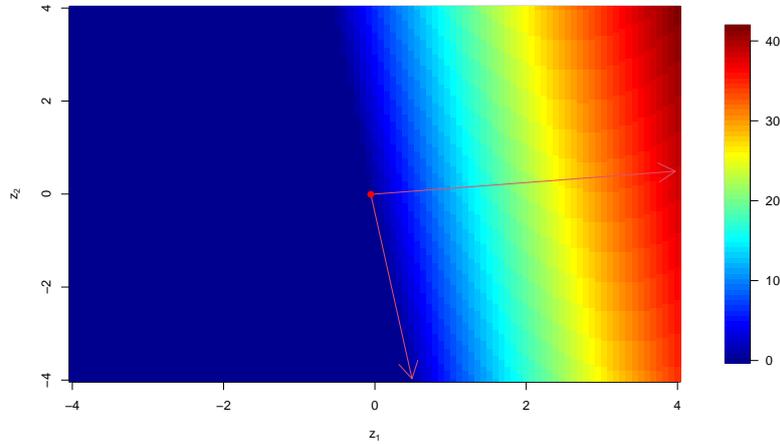


Figura 2: Valori di  $V(\mathbf{z}_T)$  nel piano  $(z_1(T), z_2(T))$ . Il punto rosso indica le coordinate di  $\mathbf{z}_T^*$  (il punto a maggiore densità di probabilità tra quelli per i quali il prezzo dello swap è nullo), le frecce rosse le direzioni dei due nuovi assi per il calcolo del prezzo della swaption.

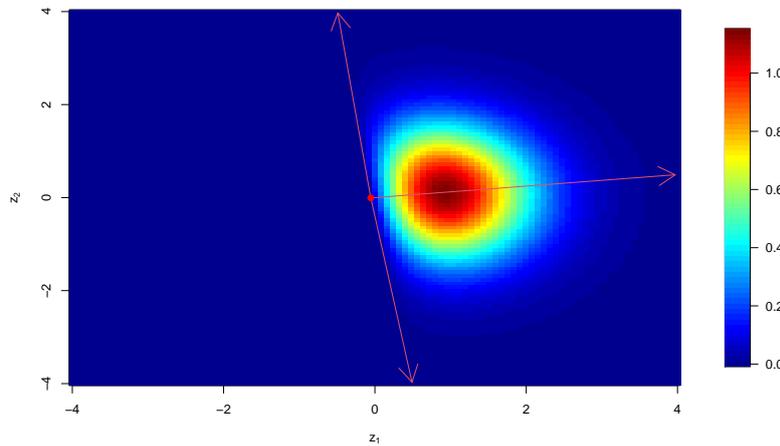


Figura 3: Valori di  $V(\mathbf{z}_T)\varphi(\mathbf{0}, \mathbf{I})$  nel piano  $(z_1(T), z_2(T))$ . Il punto rosso indica le coordinate di  $\mathbf{z}_T^*$ , le frecce rosse le direzioni dei due nuovi assi. L'approssimazione di Choi e Shin consiste nel calcolare il valore atteso di  $V(\mathbf{z}_T)$  limitando l'integrazione alla regione "di destra" del piano (identificata dalla retta passante per  $\mathbf{z}_T^*$ ).

## 4.6 L'approccio di Russo e Torri

Ultimo in ordine di pubblicazione, ma estremamente interessante, è l'approccio di Russo e Torri [9].

Gli autori partono dalla formulazione di Brigo e Mercurio sotto la misura *risk-neutral*, in cui:

$$\begin{aligned} r(t) &= \varphi(t) + x_1(t) + x_2(t) \\ dx_1(t) &= -\widehat{\alpha}_1 x_1(t) dt + \sigma_1 dW_1(t), \quad x_1(t_0) = 0, \\ dx_2(t) &= -\widehat{\alpha}_2 x_2(t) dt + \sigma_2 dW_2(t), \quad x_2(t_0) = 0, \end{aligned} \quad (134)$$

con

$$dW_1(t) dW_2(t) = \rho dt, \quad (135)$$

e

$$\varphi(t) = f^M(t_0, t) + \sum_{i=1}^2 \frac{\sigma_i^2}{2\widehat{\alpha}_i^2} \left(1 - e^{-\widehat{\alpha}_i(t-t_0)}\right)^2 + \rho \prod_{i=1}^2 \frac{\sigma_i}{\widehat{\alpha}_i} \left(1 - e^{-\widehat{\alpha}_i(t-t_0)}\right). \quad (136)$$

Successivamente caratterizzano il prezzo di uno zero coupon bond unitario in modo da garantire in *perfect fitting* in  $t_0$ :

$$v(t, T) = \frac{v^M(t_0, T)}{v^M(t_0, t)} \frac{v_x(t_0, t)}{v_x(t_0, T)} v_x(t, T), \quad (137)$$

dove, per  $i = 1, 2$ , si ha:

$$\begin{aligned} v_x(t, T) &= \left[ \prod_{i=1}^2 G_i(t, T) e^{-H_i(t, T)} \right] C(t, T), \\ C(t, T) &= \exp \left[ \rho \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\widehat{\alpha}_1 \widehat{\alpha}_2} \left( (T-t) - H_1(t, T) - H_2(t, T) + \frac{1 - e^{-(\widehat{\alpha}_1 + \widehat{\alpha}_2)(T-t)}}{\widehat{\alpha}_1 + \widehat{\alpha}_2} \right) \right], \\ G_i(t, T) &= \exp \left[ -\frac{\sigma_i^2}{2\widehat{\alpha}_i^2} (H_i(t, T) - (T-t)) - \frac{\sigma_i^2}{4\widehat{\alpha}_i} H_i(t, T)^2 \right], \\ H_i(t, T) &= \frac{1 - e^{-\widehat{\alpha}_i(T-t)}}{\widehat{\alpha}_i}. \end{aligned} \quad (138)$$

*Osservazione.* Per  $T \rightarrow t$  si ha:

$$\lim_{T \rightarrow t} H_i(t, T) = 0, \quad \lim_{T \rightarrow t} G_i(t, T) = 1, \quad \lim_{T \rightarrow t} C(t, T) = 1, \quad \lim_{T \rightarrow t} v_x(t, T) = 1$$

che garantiscono il *perfect fitting*:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} v(t, T) = v^M(t_0, T). \quad (139)$$

■

Gli autori fanno correttamente notare che le funzioni  $H_i(t, T)$  sono le componenti della duration stocastica:

$$D_i(t, T) = -\frac{1}{v(t, T)} \frac{\partial v(t, T)}{\partial x_i(t)} = H_i(t), \quad i = 1, 2. \quad (140)$$

Successivamente introducono il coupon bond su cui è scritta la swaption, il cui prezzo è:

$$V(t, t_n) = \sum_{i=1}^n c_i v(t, t_i) \quad (141)$$

dove:

$$c_i = \begin{cases} K(t_i - t_{i-1}) & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ 1 + K(T_i - t_{i-1}) & i = n, \end{cases} \quad (142)$$

essendo  $K$  il tasso *strike* della swaption.

Sotto la misura *risk neutral* la dinamica del prezzo del coupon bond è:

$$\frac{dV(t, t_n)}{V(t, t_n)} = r(t)dt - \sum_{i=1}^2 \sigma_i D_{B_i}(t, t_n) dW_i(t), \quad (143)$$

con  $D_{B_i}(t, t_n)$  ( $i = 1, 2$ ) le componenti della duration stocastica del coupon bond:

$$D_{B_i}(t, t_n) = -\frac{1}{V(t, t_n)} \frac{\partial V(t, t_n)}{\partial x_i(t)} = \frac{\sum_{j=1}^n c_j v(t, t_j) H_i(t, t_j)}{\sum_{j=1}^n c_j v(t, t_j)} \quad (144)$$

Fino a qui l'impostazione è identica a quella "classica" di altri autori. Per ricavare il prezzo di una swaption Russo e Torri considerano ora la misura *T-forward* e ipotizzano che sotto tale misura il prezzo a termine del coupon bond:

$$V(t, s, t_n) = \frac{V(t, t_n)}{v(t, s)}, \quad t \leq s \leq t_n, \quad (145)$$

sia una martingala. Purtroppo, in [9], e nei lavori ivi citati dagli autori, manca la dimostrazione esplicita di tale ipotesi.

In linea con tale ipotesi la dinamica sotto la misura *T-forward* del prezzo a termine è:

$$\frac{dV(t, s, t_n)}{V(t, s, t_n)} = \sum_{i=1}^2 \sigma_i D_{B_i}(t, s, t_n) dW_i^T(t), \quad (146)$$

dove  $D_{B_i}(t, s, t_n)$  ( $i = 1, 2$ ) sono le componenti della *forward* duration:

$$D_{B_i}(t, s, t_n) = \frac{\sum_{j=1}^n c_j v(t, t_j) [H_i(t, t_j) - H_i(t, s)]}{\sum_{j=1}^n c_j v(t, t_j)}. \quad (147)$$

Di conseguenza la varianza del prezzo a termine è data dalla relazione:

$$\begin{aligned} \sigma_v^2(t, s, t_n) = & \sigma_1^2 D_1(t, s, t_n)^2 + \sigma_2^2 D_2(t, s, t_n)^2 + \\ & + 2\rho\sigma_1\sigma_2 D_1(t, s, t_n) D_2(t, s, t_n). \end{aligned} \quad (148)$$

*Osservazione.* Si noti che le duration  $D_i(t, s, t_n)$  che compaiono nella (148) dipendono solo dai parametri  $\hat{\alpha}_i$  ( $i = 1, 2$ ). Pertanto, è possibile identificare diverse terne  $(\sigma_1, \sigma_2, \rho)$  per le quali il valore di  $\sigma_v^2(t, s, t_n)$  rimane costante. Questa caratteristica induce a ritenere che il problema di calibrazione sia *mal posto*, nel senso che piccole variazioni dei dati in input possono portare a soluzioni tra loro molto diverse. Effettivamente, gli autori segnalano il problema numerico, pur non identificandone l'origine. ■

La (146) è una dinamica di tipo log-normale, priva di deriva, con volatilità che dipende dal tempo in modo deterministico. Il prezzo del coupon bond (il sottostante della swaption) alla scadenza della swaption  $T$  è  $V(s, s, t_n)$ , pertanto:

$$V_{sw}(t_0) = V(t_0, t_n) \Phi(d_1) - v(t_0, T) \Phi(d_2), \quad (149)$$

dove

$$d_{1/2} = \frac{\log\left(\frac{V(t_0, t_n)}{v(t_0, T)}\right) \pm \frac{1}{2}\Sigma_v^2(t, T, t_n)}{\Sigma_v(t, T, t_n)}, \quad (150)$$

essendo

$$\Sigma_v(t_0, T, t_n) = \left[ \int_{t_0}^s \sigma_v^2(u, T, t_n) du \right]^{1/2}. \quad (151)$$

Si noti che la (4.7) deve essere calcolata in modo numerico, tipicamente per quadratura. Per tale motivo l'approccio di Russo e Torri risulta leggermente più lento dell'algorithmo di Choi e Shin, che invece non necessita il calcolo di integrali numerici.

La (149) mostra che il portafoglio replicante della swaption è costituito da una posizione lunga su un coupon bond e una posizione corta su uno zero coupon bond.

## 4.7 Risultati numerici

I risultati numerici riportati in questo paragrafo vanno interpretati in termini relativi, non essendo il tema della bontà di adattamento del modello rilevante ai fini del confronto degli algoritmi.

Le tabelle, dalla 2 alla 7 riportano i prezzi delle swaption ATM al 31/12/2020 calcolate con otto algoritmi diversi, rispettivamente il metodo Monte Carlo, le quadrature di Newton e di Gauss in una dimensione, le quadrature di Newton e di Gauss in due dimensioni, il metodo di Schrager e Pelsser, quello di Choi e Shin, e quello di Russo e Torri. Ogni tabella riporta i prezzi di opzioni con stessa scadenza, rispettivamente  $T = 1, 3, 5, 10, 15$  e 20 anni, aventi per sottostate un IRS di durata  $t_\beta - T = 1, 3, 5, 10, 15$  e 20 anni.

I parametri del modello  $G2^{++}$  utilizzati nella valutazione sono, rispettivamente,  $\hat{\alpha}_1 = 0.016$ ,  $\hat{\alpha}_2 = 0.262$ ,  $\sigma_1 = 0.012$ ,  $\sigma_2 = 0.004$ ,  $\rho = -0.446$ . I valori delle variabili di stato alla data di valutazione  $t_0$  sono  $x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0$ .

Per il metodo Monte Carlo sono state utilizzate 40.000 simulazioni di passo settimanale (52 intervalli annui). La simulazione delle traiettorie di  $\mathbf{x}(t)$  è effettuata senza errore di discretizzazione. Il defattore è calcolato con la c.d. regola del trapezio.

Per le quadrature sono riportati sia i risultati ottenuti con le quadrature di Newton che con quelle di Gauss, rispettivamente in una e due dimensioni. In tutti i casi gli integrali sono stati troncati a 8 deviazioni standard della distribuzione di  $\mathbf{x}(T)$  (in ciascuna delle dimensioni coinvolte). Per le quadrature di Newton si è utilizzata la regola del trapezio, mentre per le quadrature di Gauss sono state usate le quadrature di Gauss-Legendre. In una dimensione sono state utilizzate partizioni costanti di ampiezza 0,001, mentre per tutti gli altri casi sono state utilizzate partizioni composte da 100 nodi.

Per la determinazione con il metodo di Choi e Shin, l'algoritmo di determinazione di  $\mathbf{z}_T^*$  è stato riscritto, emendando alcune imprecisioni del testo originale.

Per la determinazione con il metodo di Russo e Torri l'integrale nella è stato calcolato con le quadrature di Gauss-Legendre con 100 nodi.

Come si evince dalla tabelle, tutti i metodi sono in ottimo accordo, con l'esclusione del metodo di Schrager-Pelsser, che si discosta significativamente dagli altri per valori di  $T > 10$  anni.

Metodo	$T$	$t_\beta - T$	prezzo	$t_\beta - T$	prezzo	$t_\beta - T$	prezzo
Monte Carlo	1	1	0.4730447	3	1.298423	5	2.1719616
Newton $1d$	1	1	0.4730325	3	1.299234	5	2.1743597
Gauss $1d$	1	1	0.4730325	3	1.299234	5	2.1743600
Newton $2d$	1	1	0.4730338	3	1.299242	5	2.1743896
Gauss $2d$	1	1	0.4730470	3	1.299154	5	2.1743716
Schrager-Pelsser	1	1	0.4561848	3	1.302157	5	2.1749948
Choi-Shin	1	1	0.4730325	3	1.299234	5	2.1743597
Russo-Torri	1	1	0.4730325	3	1.299233	5	2.1743553
Monte Carlo	1	10	4.262320	15	6.095736	20	8.441083
Newton $1d$	1	10	4.269632	15	6.108014	20	8.459089
Gauss $1d$	1	10	4.269827	15	6.107080	20	8.454126
Newton $2d$	1	10	4.269686	15	6.108141	20	8.458466
Gauss $2d$	1	10	4.269619	15	6.106820	20	8.454249
Schrager-Pelsser	1	10	4.273532	15	6.137967	20	8.173274
Choi-Shin	1	10	4.269632	15	6.108014	20	8.459089
Russo-Torri	1	10	4.269597	15	6.107987	20	8.459078

Tabella 2: Prezzi di swaption con scadenza in  $T = 1$  anno e durata dello swap sottostante  $t_\beta - T = 1, 3, 5, 10, 15, 20$  anni, ottenuti con i diversi algoritmi.

Metodo	$T$	$t_\beta - T$	prezzo	$t_\beta - T$	prezzo	$t_\beta - T$	prezzo
Monte Carlo	3	1	0.7707516	3	2.2777063	5	3.794175
Newton $1d$	3	1	0.7685456	3	2.2713588	5	3.784448
Gauss $1d$	3	1	0.7685456	3	2.2713599	5	3.784458
Newton $2d$	3	1	0.7685461	3	2.2713399	5	3.784446
Gauss $2d$	3	1	0.7685529	3	2.2713136	5	3.784658
Schrager-Pelsser	3	1	0.7682193	3	2.2714959	5	3.784741
Choi-Shin	3	1	0.7685456	3	2.2713588	5	3.784448
Russo-Torri	3	1	0.7685456	3	2.2713570	5	3.784437
Monte Carlo	3	10	7.224768	15	10.40769	20	15.658254
Newton $1d$	3	10	7.209233	15	10.38976	20	15.645911
Gauss $1d$	3	10	7.208332	15	10.38027	20	15.650191
Newton $2d$	3	10	7.209249	15	10.38981	20	15.643871
Gauss $2d$	3	10	7.208500	15	10.38014	20	15.650126
Schrager-Pelsser	3	10	7.226818	15	10.44042	20	15.300459
Choi-Shin	3	10	7.209233	15	10.38976	20	15.645911
Russo-Torri	3	10	7.209192	15	10.39010	20	15.645407

Tabella 3: Prezzi di swaption con scadenza in  $T = 3$  anni e durata dello swap sottostante  $t_\beta - T = 1, 3, 5, 10, 15, 20$  anni, ottenuti con i diversi algoritmi.

Metodo	$T$	$t_\beta - T$	prezzo	$t_\beta - T$	prezzo	$t_\beta - T$	prezzo
Monte Carlo	5	1	0.9941611	3	2.952822	5	4.825341
Newton 1d	5	1	0.9910543	3	2.944622	5	4.812453
Gauss 1d	5	1	0.9910544	3	2.944632	5	4.812512
Newton 2d	5	1	0.9910531	3	2.944651	5	4.812500
Gauss 2d	5	1	0.9910810	3	2.944495	5	4.812313
Schrager-Pelsser	5	1	0.9939734	3	2.949525	5	4.808879
Choi-Shin	5	1	0.9910543	3	2.944622	5	4.812453
Russo-Torri	5	1	0.9910543	3	2.944620	5	4.812445
Monte Carlo	5	10	9.403819	15	13.549585	20	21.364179
Newton 1d	5	10	9.378248	15	13.510286	20	21.310661
Gauss 1d	5	10	9.373079	15	13.501984	20	21.300407
Newton 2d	5	10	9.378293	15	13.508542	20	21.314021
Gauss 2d	5	10	9.372986	15	13.501760	20	21.300328
Schrager-Pelsser	5	10	9.402088	15	13.574564	20	21.555534
Choi-Shin	5	10	9.378248	15	13.510286	20	21.310661
Russo-Torri	5	10	9.378453	15	13.511643	20	21.308179

Tabella 4: Prezzi di swaption con scadenza in  $T = 5$  anno e durata dello swap sottostante  $t_\beta - T = 1, 3, 5, 10, 15, 20$  anni, ottenuti con i diversi algoritmi.

Metodo	$T$	$t_\beta - T$	prezzo	$t_\beta - T$	prezzo	$t_\beta - T$	prezzo
Monte Carlo	10	1	1.3712400	3	3.927763	5	6.658880
Newton 1d	10	1	1.3810221	3	3.954746	5	6.698681
Gauss 1d	10	1	1.3810327	3	3.954976	5	6.697386
Newton 2d	10	1	1.3810309	3	3.954777	5	6.698762
Gauss 2d	10	1	1.3809646	3	3.955109	5	6.697382
Schrager-Pelsser	10	1	1.3924627	3	3.886141	5	6.736671
Choi-Shin	10	1	1.3810221	3	3.954746	5	6.698681
Russo-Torri	10	1	1.3810221	3	3.954760	5	6.698757
Monte Carlo	10	10	12.774575	15	22.345942	20	33.71897
Newton 1d	10	10	12.833833	15	22.401280	20	33.74800
Gauss 1d	10	10	12.825869	15	22.395526	20	33.76654
Newton 2d	10	10	12.832562	15	22.403818	20	33.75643
Gauss 2d	10	10	12.825779	15	22.395394	20	33.76653
Schrager-Pelsser	10	10	12.907777	15	24.683338	20	37.93056
Choi-Shin	10	10	12.833833	15	22.401280	20	33.74800
Russo-Torri	10	10	12.835073	15	22.398774	20	33.73859

Tabella 5: Prezzi di swaption con scadenza in  $T = 10$  anni e durata dello swap sottostante  $t_\beta - T = 1, 3, 5, 10, 15, 20$  anni, ottenuti con i diversi algoritmi.

Metodo	$T$	$t_\beta - T$	prezzo	$t_\beta - T$	prezzo	$t_\beta - T$	prezzo
Monte Carlo	15	1	1.5203398	3	4.502957	5	7.751375
Newton $1d$	15	1	1.5274321	3	4.522432	5	7.781255
Gauss $1d$	15	1	1.5275029	3	4.523397	5	7.778095
Newton $2d$	15	1	1.5274249	3	4.522375	5	7.781403
Gauss $2d$	15	1	1.5274735	3	4.523336	5	7.778094
Schrager-Pelsser	15	1	1.4457574	3	4.280075	5	7.781105
Choi-Shin	15	1	1.5274321	3	4.522432	5	7.781255
Russo-Torri	15	1	1.5274321	3	4.522458	5	7.781381
Monte Carlo	15	10	19.078792	15	31.97865	20	44.29468
Newton $1d$	15	10	19.110373	15	31.98164	20	44.27277
Gauss $1d$	15	10	19.104541	15	32.00280	20	44.28832
Newton $2d$	15	10	19.111915	15	31.98945	20	44.26112
Gauss $2d$	15	10	19.104513	15	32.00280	20	44.28832
Schrager-Pelsser	15	10	22.729012	15	39.51629	20	54.53387
Choi-Shin	15	10	19.110373	15	31.98164	20	44.27277
Russo-Torri	15	10	19.108994	15	31.97939	20	44.28057

Tabella 6: Prezzi di swaption con scadenza in  $T = 15$  anni e durata dello swap sottostante  $t_\beta - T = 1, 3, 5, 10, 15, 20$  anni, ottenuti con i diversi algoritmi.

Metodo	$T$	$t_\beta - T$	prezzo	$t_\beta - T$	prezzo	$t_\beta - T$	prezzo
Monte Carlo	20	1	2.3781179	3	7.658967	5	13.297662
Newton $1d$	20	1	2.3813879	3	7.667001	5	13.307361
Gauss $1d$	20	1	2.3815380	3	7.665811	5	13.312092
Newton $2d$	20	1	2.3813770	3	7.667031	5	13.307350
Gauss $2d$	20	1	2.3815814	3	7.665906	5	13.312100
Schrager-Pelsser	20	1	3.0379696	3	10.123325	5	17.840960
Choi-Shin	20	1	2.3813879	3	7.667001	5	13.307361
Russo-Torri	20	1	2.3813879	3	7.666999	5	13.307346
Monte Carlo	20	10	28.024866	15	41.71547	20	53.63212
Newton $1d$	20	10	28.001726	15	41.63327	20	51.50058
Gauss $1d$	20	10	28.015984	15	41.66423	20	51.28216
Newton $2d$	20	10	27.998958	15	41.63445	20	53.50471
Gauss $2d$	20	10	28.015981	15	41.66655	20	53.49503
Schrager-Pelsser	20	10	37.881809	15	55.76488	20	70.56742
Choi-Shin	20	10	28.001726	15	41.63602	20	53.49636
Russo-Torri	20	10	28.004792	15	41.65431	20	53.55266

Tabella 7: Prezzi di swaption con scadenza in  $T = 20$  anni e durata dello swap sottostante  $t_\beta - T = 1, 3, 5, 10, 15, 20$  anni, ottenuti con i diversi algoritmi.

## 5 Conclusioni

Nonostante l'assenza di una dimostrazione formale completa, il metodo di Russo e Torri [9] si è dimostrato veloce e in perfetto accordo numerico con quello, teoricamente robusto, di Choi e Shin [3], nonché con quelli "classici", basati sull'integrazione numerica via Monte Carlo o quadrature.

Per la sua semplicità di implementazione e per la formulazione che permette anche una significativa interpretazione di tipo finanziario, l'approccio di Russo e Torri appare preferibile a tutti gli altri, anche a scapito di una leggera penalizzazione in termini di velocità di calcolo.

## Riferimenti bibliografici

- [1] L. B. G. Andersen, V. V. Piterbarg, *Interest Rate Modeling. Volume 2: Term Structure Models*, Atlantic Financial Press (2010).
- [2] D. Brigo, F. Mercurio, *Interest Rate Models – Theory and Practice*, 2<sup>a</sup> ed., Springer (2007).
- [3] J. Choi, S. Shin, *Fast swaption pricing in Gaussian term structure models*, *Mathematical Finance*, 26(4), 2016, 962–982.
- [4] J. Choi, S. Shin, *Fast swaption pricing in Gaussian term structure models*, arXiv:1803.08803.
- [5] M. Di Francesco, *A General Gaussian Interest Rate Model Consistent with the Current Term Structure*, International Scholarly Research Network (ISRN), Probability and Statistics, Volume 2012, Article ID 673607.
- [6] A. Doucet, N. de Freitas, N. Gordon ed., *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, Springer (2001).
- [7] C. Munk, *Fixed Income Modelling*, Oxford University Press (2011).
- [8] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, *Numerical mathematics*, Springer (2000).
- [9] V. Russo, G. Torri, *Calibration of one-factor and two-factor Hull–White models using swaptions*, *Computational Management Science*, 16, 2019, 275-295.
- [10] D. F. Schrage, A. A. J. Pelsser, *Pricing swaptions and coupon bond options in affine term structure models*, *Mathematical Finance*, 16(4), 2006, 673–694.
- [11] K. J. Singleton, L. Umantsev, *Pricing coupon-bond options and swaptions in affine term structure models*, *Mathematical Finance*, 12(4), 2002, 427-446.