

Francesco Cetta

# rapporto assicurativo e decisioni d'impresa

metodi di valutazione

Università degli Studi di Roma « La Sapienza »



Prezzo L. 15.000 (IVA incl.)

Fa	stist.
ist.	eriali
3	
6	
Uni	oma

**NO**

368/6.14

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA « LA SAPIENZA »  
FACOLTÀ DI SCIENZE STATISTICHE DEMOGRAFICHE ED ATTUARIALI

Francesco Cetta

# rapporto assicurativo e decisioni d'impresa

metodi di valutazione

II Edizione 1984

DIPARTIMENTO DI SCIENZE ATTUARIALI E FINANZIARIE
368/
6.14
BIBLIOTECA



CF10010318  
OMA/625

OM 626

ROMA  
LIBRERIA EREDI VIRGILIO VESCHI  
Viale dell'Università, 7 - Tel. 491.739

(a Valeria, Fabio e Marco)

Le copie non firmate dall'Autore si ritengono contraffatte.

L'Autore rinuncia ai Suoi Diritti per contenere il prezzo del volume.

Tipo-litografia Marves  
Via Mecenate, 35 - Roma - Tel. 730.061

## I N D I C E

Premessa

Pag. 5

### CAPITOLO PRIMO:

Le basi tecniche	"	7
1. Il rischio dell'Impresa	"	7
2. La distribuzione temporale dei sinistri	"	7
3. Il processo di Poisson	"	8
4. La funzione generatrice delle probabilita'	"	12
5. La v.c. Binomiale negativa	"	16
6. La distribuzione dei sinistri per importo del danno	"	17
7. La distribuzione generalizzata di Poisson	"	20
8. I parametri fondamentali	"	24

### Appendice

A.1 La v.c. di Bernoulli	"	26
A.2 La v.c. Binomiale	"	26
A.3 La v.c. Geometrica	"	27
A.4 L'operazione di convoluzione	"	27

### CAPITOLO SECONDO:

Il premio nelle assicurazioni rami elementari	"	30
1. Considerazioni generali	"	30
2. I criteri di valutazione del premio	"	31
3. Le limitazioni della copertura assicurativa	"	32
4. Le basi empiriche	"	35
5. L'influenza monetaria	"	39
6. Un'applicazione	"	43

### CAPITOLO TERZO:

La funzione di utilita' nel rapporto assicurativo	"	46
1. Considerazioni generali	"	46
2. L'utilita' attesa	"	48
3. Il rapporto assicurativo	"	50
4. Certo equivalente e premio di rischio	"	52
5. Alcuni esempi	"	54

6. La distribuzione del rischio	Pag. 57
7. L'utilità dell'Impresa	" 60
8. Le decisioni dell'assicurato	" 62
9. Il caricamento di sicurezza	" 66

CAPITOLO QUARTO:

La stabilità dell'Impresa e il rapporto riassicurativo	" 70
1. Commento introduttivo	" 70
2. La solvibilità dell'Impresa	" 71
3. L'impostazione classica (unico esercizio)	" 76
4. La stabilità dell'Impresa	" 81
5. Il problema dei pieni	" 82
6. Il modello decisionale	" 89
7. Il trasferimento del rischio	" 91
8. Il trattato in quota	" 92
9. Le strategie di coalizione	" 96
10. Il trattato reciproco	" 99

BIBLIOGRAFIA

" 111

PREMESSA

*Gli argomenti che vengono trattati si riferiscono alle lezioni tenute nel corso di Tecnica attuariale delle assicurazioni contro i danni dall'a.a. 1980/81 all'a.a. 1983/84.*

*Particolare rilievo è dato agli aspetti fondamentali della impostazione classica e collettiva della Teoria del Rischio, collegando le possibili situazioni di scelta che si possono presentare ad una Compagnia ai metodi di valutazione delle distribuzioni di danno afferenti ad un portafoglio assicurato.*

*Per quanto riguarda i modelli decisionali che si avvalgono come funzione obiettivo dell'utilità attesa associata ad un prospetto aleatorio, con riferimento soprattutto al rapporto riassicurativo, si è sviluppata l'impostazione originariamente fornita da K. Borch, circoscrivendo comunque l'analisi agli aspetti prevalentemente analitici di interesse per le strategie d'Impresa.*

*Una bibliografia "campione" rimanda infine lo studente agli articoli ed ai testi significativi per un approfondimento dei problemi esaminati.*



Capitolo Primo

LE BASI TECNICHE

**1. Il rischio dell'Impresa**

Al momento dell'assunzione l'Impresa individua un rischio  $\rho_{[0, t]} \stackrel{\text{def}}{=} \{ \tilde{N}(t), \tilde{x}(t) \}$  attraverso le due componenti aleatorie  $\tilde{N}(t)$ , numero dei sinistri che in un intervallo  $[0, t]$  o periodo di esposizione colpiranno il rischio assicurato (ipotesi di ripetibilità dell'evento), ed  $\tilde{x}(t)$  danno patrimoniale. Pertanto il primo passo consiste nell'isolare tali componenti al fine di quantificare propriamente la controprestazione del contraente. Nei paragrafi che seguono verranno analizzate le distribuzioni di probabilità che governano le variabili casuali  $\tilde{N}(t)$  ed  $\tilde{x}(t)$ , considerando come oggetto di riferimento l'intero portafoglio assicurato costituito da impegni indipendenti, omogenei e stabili, dove  $\rho_{[0, t]}$  secondo l'impostazione collettiva va inteso come rischio globale affrontato dalla Compagnia.

**2. La distribuzione temporale dei sinistri**

Sia  $\tilde{t}$  la variabile casuale indicante l'intervallo di tempo intercorrente tra il verificarsi di due sinistri successivi. Seguendo le linee di impostazione proprie della *Teoria delle code*, a tale v. c. è associata la distribuzione esponenziale negativa

$$(2.1) \quad \tilde{t} \leftrightarrow F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

derivante dalla condizione  $Pr\{\tilde{t} > t\} = Pr\{\text{nessun sinistro nell'intervallo di ampiezza } t\} = \exp(-\lambda t)$  con parametro  $\lambda > 0$ . Dalla (2.1) è immediata la funzione di densità, supponendo  $\tilde{t}$  assolutamente continua:

$$(2.2) \quad f(t) = \dot{F}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Sulla base di tale ipotesi riguardante il tempo degli arrivi consecutivi e' possibile individuare il processo aleatorio numero degli arrivi o sinistri con riferimento ad un generico rischio  $\rho[0, t]$ .

### 3. Il processo di Poisson

Si consideri il p.a.  $\{N(t): t \geq 0\}$  nell'intervallo  $[0, t]$  individuante il numero di sinistri che possono colpire un rischio assicurato, con determinazioni intere (v.c. discreta)  $0, 1, 2, \dots$  ed  $N(0)=0$ . Tale processo aleatorio soddisfa alle seguenti condizioni affinche' sia definito di Poisson:

- a)- la probabilita'  $p_1(\Delta t)$  che accada un solo sinistro in  $(t, t+\Delta t)$ , ovvero nell'intervallo di ampiezza  $\Delta t$ , e' direttamente proporzionale a  $\Delta t$ , con  $\lambda$  costante di proporzionalita':

$$p_1(\Delta t) = \lambda \Delta t + \theta(\Delta t)$$

in cui  $\theta(\Delta t)$  e' un infinitesimo per  $\Delta t \rightarrow 0$ :  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta(\Delta t)}{\Delta t} = 0$

- b)- il numero dei sinistri costituisce un processo ad incrementi indipendenti, vale a dire e':  
 b1)- a parametro continuo ( $0 \leq t < +\infty$ );  
 b2)- fissati comunque gli istanti  $t$  e  $t+\Delta t$ , risulta:

$$\{N(t+\Delta t) - N(t)\} \rightarrow \text{v.c. indipendenti};$$

- c)- il numero dei sinistri in  $(t, t+\Delta t)$  dipende solo dall'ampiezza dell'intervallo  $\Delta t$  e non da  $t$ , cioe' si evolve ad incrementi stazionari: la distribuzione pertanto di  $\{N(t+\Delta t) - N(t)\}$  dipende solo da  $\Delta t$  e non da  $t$ ;  
 d)-  $p_n(0) = 0$  ( $n > 1$ ) e  $p_0(0) = 1$ .

In virtua' delle condizioni poste, la probabilita'  $p_n(t)$  che accadano  $n$  sinistri in un intervallo di tempo di lunghezza  $t$ , associata alla variabile casuale discreta  $N(t)=0, 1, 2, \dots$  puo' essere cosi' determinata. In  $t+\Delta t$  risulta innanzi tutto:

$$(3.1) \quad p_n(t+\Delta t) = p_n(t) [1 - \lambda \Delta t - \theta(\Delta t)] + p_{n-1}(t) [\lambda \Delta t + \theta(\Delta t)]$$

in quanto la probabilita' che si verifichino  $n$  sinistri nell'intervallo  $[0, t+\Delta t]$  e' data dalla misura dei seguenti eventi incompatibili:

- i)  $n$  sinistri fino a  $t$  e nessuno nell'intervallo  $\Delta t$ ;  
 ii)  $n-1$  sinistri fino a  $t$  ed un sinistro soltanto nell'intervallo  $\Delta t$ .

Dalla (3.1):

$$(3.2) \quad \frac{p_n(t+\Delta t) - p_n(t)}{\Delta t} = -\lambda p_n(t) - p_n(t) \frac{\theta(\Delta t)}{\Delta t} + \lambda p_{n-1}(t) + p_{n-1}(t) \frac{\theta(\Delta t)}{\Delta t}$$

e ricordando che  $\theta(\Delta t)$  e' un infinitesimo per  $\Delta t \rightarrow 0$  si ricava in definitiva:

$$(3.3) \quad \dot{p}_n(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t)$$

la quale e' un'equazione differenziale del primo ordine alle differenze, in quanto la variabile  $t$  e' continua mentre la variabile  $n$  e' discreta.

Per il calcolo dell'integrale particolare (si ricordino a tal fine le condizioni al contorno nel punto d)) si puo' procedere per via ricorrente. Nel caso particolare  $n=0$  risulta ovviamente:

$$(3.4) \quad \dot{p}_0(t) = -\lambda p_0(t)$$

e pertanto l'integrale generale in  $[0, t]$

$$p_0(t) = p_0(0) e^{-\lambda t}$$

e quello particolare, con  $p_0(0)=1$ :  $p_0(t) = e^{-\lambda t}$ .

Per  $n=1$  dalla (3.3), tenendo presente quanto ottenuto in base alla (3.4):

$$(3.5) \quad \dot{p}_1(t) = -\lambda p_1(t) + \lambda p_0(t)$$

ovvero

$$\dot{p}_1(t) = -\lambda p_1(t) + \lambda e^{-\lambda t}$$

la quale è un'equazione differenziale lineare non omogenea (\*).

Risulta:

$$p_1(t) = e^{-\lambda t} \left\{ p_1(0) + \int_0^t \lambda e^{\lambda \tau} e^{-\lambda \tau} d\tau \right\}$$

e posto  $p_1(0)=0$  si ricava:

$$(3.6) \quad p_1(t) = e^{-\lambda t} \int_0^t \lambda d\tau = \lambda t e^{-\lambda t}$$

Proseguendo il calcolo per successivi valori di  $n$ , si perviene infine alla probabilità cercata  $p_n(t)$  del processo di Poisson:

$$(3.7) \quad p_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad n \geq 0$$

D'altro canto la generale validità della (3.7) può essere provata per induzione. Infatti la (3.3) per  $n+1$  risulta:

$$(3.8) \quad \dot{p}_{n+1}(t) = -\lambda p_{n+1}(t) + \lambda p_n(t)$$

ovvero

(\*) Assegnata l'equazione differenziale e lineare non omogenea del primo ordine

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + u(t)$$

a coefficienti dinamici in  $[0, t]$ , si ottiene mediante il metodo della variazione dei parametri il seguente integrale generale:

$$\hat{x}(t) = e^{\int_0^t a(\nu) d\nu} \left\{ \hat{x}(0) + \int_0^t e^{-\int_0^\tau a(\nu) d\nu} u(\tau) d\tau \right\}$$

Noto quindi il valore iniziale  $\hat{x}(0) = x_0$  si ricava l'integrale particolare.

$$\dot{p}_{n+1}(t) = -\lambda p_{n+1}(t) + \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

con l'integrale generale:

$$p_{n+1}(t) = e^{-\int_0^t \lambda d\nu} \left\{ p_{n+1}(0) + \int_0^t e^{\int_0^\tau \lambda d\nu} \lambda e^{-\lambda \tau} \frac{(\lambda \tau)^n}{n!} d\tau \right\}$$

Dalla condizione posta  $p_{n+1}(0)=0$  si ricava quindi:

$$p_{n+1}(t) = e^{-\lambda t} \frac{\lambda^{n+1}}{n!} \int_0^t \tau^n d\tau = e^{-\lambda t} \cdot \frac{\lambda^{n+1}}{n!} \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

Ed infine, tenendo presente che  $(n+1)! = (n+1)n!$

$$(3.9) \quad p_{n+1}(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Viene così verificato che se la (3.7) è valida per  $n$  rimane ancora valida per  $n+1$ .

Riguardo al processo di Poisson  $\{N(t): t \geq 0\}$  appena caratterizzato sono opportune alcune osservazioni. In primo luogo, come in seguito si dimostrerà nel caso particolare  $t=1$ , risulta:

$$(*) \quad E[\tilde{N}(t)] = \sigma^2[\tilde{N}(t)] = \lambda t$$

il che naturalmente per la distribuzione del numero dei sinistri e limitante considerare media e varianza uguali. Una migliore aderenza alla fenomenologia effettiva viene fornita dalla variabile casuale binomiale negativa appresso definita.

In secondo luogo la funzione di ripartizione associata risulta:

$$(3.10) \quad P(n) = Pr\{\tilde{N}(t) \leq n\} = \sum_{h=0}^n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^h}{h!}$$

(\*) In questo caso  $\lambda t$  rappresenta il numero medio di sinistri che possono colpire un rischio assicurato nell'intervallo  $[0, t]$ .

Per  $n \rightarrow +\infty$ , in base al Teorema del Limite Centrale,  $\tilde{N}(t)$  tende in distribuzione alla variabile casuale Normale standardizzata  $\mathcal{N}(0, 1)$  e quindi con buona approssimazione:

$$P(n) \approx \mathcal{N} \left[ \frac{n - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} \right]$$

In terzo luogo, nel caso di processo di Poisson non omogeneo (vale a dire con parametro  $\lambda = \lambda(t)$  dipendente esplicitamente dalla variabile  $t$ ), al posto della (3.7) si dovrà considerare la probabilità

$$(3.11) \quad p_n(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u) du} \cdot \frac{\left[ \int_0^t \lambda(u) du \right]^n}{n!}$$

Infine un'ultima osservazione.

Quanto esposto fin qui può essere agevolmente inteso sotto l'ipotesi che il rischio  $\rho[0, t]$  preveda al verificarsi un esborso unitario a titolo di risarcimento. Per un importo qualsiasi  $S$  invece si avrà:

$$E^*[\tilde{N}(t)] = \lambda t S \quad \sigma^*[\tilde{N}(t)] = S \sqrt{\lambda t}$$

#### 4. La funzione generatrice delle probabilità

In questo paragrafo viene definita la funzione generatrice delle probabilità  $G(z)$ , con  $z$  variabile reale, mediante la quale sarà poi possibile calcolare i vari momenti di assegnate distribuzioni; nel nostro caso interessera' precipuamente determinare la media e la varianza della variabile casuale di Poisson che, come visto, caratterizza il processo stocastico  $\{N(t); t \geq 0\}$  del numero dei sinistri relativi ad un rischio assicurato. Si indichi a tal fine con  $p(x)$  la probabilità associata ad una variabile casuale discreta  $\tilde{x} = 0, 1, 2, \dots$  e definiamo *funzione generatrice delle probabilità* la seguente serie

di potenze:

$$(4.1) \quad G(z) \stackrel{def}{=} \sum_{x=0}^{\infty} z^x p(x) = p(0) + zp(1) + z^2 p(2) + \dots$$

E' immediato che

$$(4.2) \quad p(0) = G(z) \Big|_{z=0}$$

D'altra parte la derivata prima di  $G(z)$  risulta:

$$\frac{d}{dz} G(z) = p(1) + 2zp(2) + 3z^2 p(3)$$

e quindi:

$$(4.3) \quad p(1) = \frac{d}{dz} G(z) \Big|_{z=0}$$

Si verifica in generale per la derivata  $x$ -sima:

$$\frac{d^x}{dz^x} G(z) = x! p(x) + [(x+1)x \dots 2 \cdot 1] z p(x+1) + \dots$$

e di conseguenza:

$$(4.4) \quad p(x) = \frac{1}{x!} \frac{d^x}{dz^x} G(z) \Big|_{z=0}$$

La (4.4) fornisce per l'appunto la probabilità di una determinazione della v.c.  $\tilde{x}$  non appena sia nota la funzione generatrice delle probabilità  $G(z)$ . Così ad esempio se  $G(z) = \exp(-\lambda(1-z))$ , si ricava:

$$\frac{d^x}{dz^x} G(z) = \lambda^x e^{-\lambda(1-z)}$$

ed in base alla (4.4) per  $z=0$ :

$$p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

vale a dire  $\tilde{x}$  e' una v.c. di Poisson con parametro  $\lambda$ .

In forma generale la derivata  $n$ -sima di  $G(z)$  può essere

scritta come segue:

$$(4.5) \quad \frac{d^n}{dz^n} G(z) = \sum_0^\infty x^{(n)} x^{x-n} p(x)$$

in cui  $x^{(n)}$  viene definito *polinomio fattoriale* e risulta:

$$x^{(n)} = x(x-1)\dots(x-n+1) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < n, \\ \frac{x!}{(x-n)!} & \text{per } x \geq n \end{cases}$$

Cio' che interessa e' poter calcolare i momenti di una generica v.c. discreta una volta nota la funzione generatrice delle probabilita'. Risolvendo pertanto la (4.5) per  $z=1$  si ottiene:

$$(4.6) \quad \frac{d^n}{dz^n} G(z) \Big|_{z=1} = \sum_0^\infty x^{(n)} p(x) \stackrel{\text{def}}{=} E(x^{(n)})$$

vale a dire il valor medio del polinomio fattoriale (momento fattoriale) per ogni valore di  $n$ .

In particolare per  $n=1$   $E(x^{(1)}) = E(x)$  e quindi

$$(4.7) \quad E(x) = \frac{d}{dz} G(z) \Big|_{z=1}$$

Ancora, per  $n=2$ :

$$E(x^{(2)}) = E[x(x-1)] = E[x^2 - x] = E(x^2) - E(x)$$

e quindi

$$E(x^2) = E(x^{(2)}) + E(x)$$

cioe':

$$(4.8) \quad E(x^2) = \frac{d^2}{dz^2} G(z) \Big|_{z=1} + \frac{d}{dz} G(z) \Big|_{z=1}$$

Dal momento che  $\sigma^2(x) = E(x^2) - (E(x))^2$ , si ottiene dalla precedente espressione, tenendo presente la (4.7):

$$(4.9) \quad \sigma^2(x) = \frac{d^2}{dz^2} G(z) \Big|_{z=1} + \frac{d}{dz} G(z) \Big|_{z=1} - \left[ \frac{d}{dz} G(z) \Big|_{z=1} \right]^2$$

Le relazioni (4.7), (4.8), (4.9) in definitiva costituiscono la base di calcolo per il valor medio e la varianza di un'assegnata variabile casuale non appena sia nota la funzione generatrice delle probabilita'.

Per quanto esposto in precedenza, la funzione generatrice  $G(z) = e^{-\lambda(1-z)}$  individua la distribuzione di Poisson. Verifichiamo quindi che media e varianza coincidono.

Per quanto riguarda la derivata  $n$ -sima si ha:

$$\frac{d^n}{dz^n} G(z) = \lambda^n e^{-\lambda(1-z)}$$

e pertanto:

$$(4.10) \quad E(x) = \frac{d}{dz} G(z) \Big|_{z=1} = \lambda e^{-\lambda(1-z)} \Big|_{z=1} = \lambda$$

E per il momento secondo rispetto all'origine:

$$E(x^2) = \frac{d^2}{dz^2} G(z) \Big|_{z=1} + \frac{d}{dz} G(z) \Big|_{z=1} = \lambda^2 e^{-\lambda(1-z)} \Big|_{z=1} + \lambda = \lambda^2 + \lambda$$

Dalla (4.9) quindi:

$$(4.11) \quad \sigma^2(x) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

A chiusura del presente paragrafo si intende evidenziare una importante proprieta' relativa alla somma di  $n$  variabili casuali discrete  $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n$  con distribuzioni  $\Phi(y_1), \Phi(y_2), \dots, \Phi(y_n)$  e funzioni generatrici  $G_i(z)$  ( $i=1, \dots, n$ ). Nel caso in cui le  $\tilde{y}_i$  siano indipendenti, posto  $\tilde{x} = \sum_1^n \tilde{y}_i$  ed indicando con  $G(z)$  la funzione generatrice della variabile casuale somma  $\tilde{x}$ , si ottiene:

$$G(z) = \prod_1^n G_i(z)$$



In particolare se ogni  $\tilde{y}_i$  e' una variabile casuale di Poisson di parametro  $\lambda_i$ , con  $G_i(z) = \exp(-\lambda_i(1-z))$ , risulta:

$$(4.12) \quad G(z) = \prod_{i=1}^n G_i(z) = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i(1-z)} = e^{-(1-z) \sum_{i=1}^n \lambda_i}$$

Ponendo  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \gamma$  si ricava:

$$G(z) = \exp(-\gamma(1-z))$$

e di conseguenza

$$(4.13) \quad p(x) = \frac{\left[ \sum_{i=1}^n \lambda_i \right]^x}{x!} e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i} = \frac{\gamma^x}{x!} e^{-\gamma}$$

Tale relazione (4.13) pone in evidenza che la variabile casuale  $\tilde{x}$  somma di  $n$  v.c. di Poisson e' ancora una v.c. di Poisson con parametro  $\gamma$ .

### 5. La variabile casuale Binomiale negativa

Si e' avuto modo di accennare nel terzo paragrafo che una migliore approssimazione della sinistrosita' e' fornita dalla distribuzione della variabile casuale binomiale negativa: e' opportuno quindi approfondire il problema in esame fornendo le basi e le ipotesi di lavoro.

Indichiamo con  $\tilde{x} = \sum_{i=1}^{\alpha} \tilde{x}_i$  la v.c. somma di  $\alpha$  variabili casuali geometriche. Tale v.c. e' definita Binomiale negativa e rappresenta il numero di prove bernoulliane necessarie per conseguire un totale di  $\alpha$  successi, con probabilita':

$$(5.1) \quad \tilde{x} \sim p(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{x-\alpha} p^{\alpha} q^{x-\alpha} & x = \alpha, \alpha+1, \alpha+2, \dots \\ & \alpha = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Si ricordi che:

i) la corrispondente funzione generatrice risulta  $G(z) = \left[ \frac{pz}{1-z(1-p)} \right]^{\alpha}$

ii)  $E(x) = \frac{\alpha q}{p}; \quad \sigma^2(x) = \frac{\alpha q}{p^2}$

In pratica, al fine di evidenziare la numerosita' dei sinistri e' preferibile rappresentare la variabile casuale Binomiale negativa con  $\tilde{N}(t) = \bar{n}$ , laddove figurano due parametri  $\alpha$  e  $q=1-p$ :

$$(5.2) \quad \tilde{N}(t) \sim p_{\bar{n}}(t) = \binom{\alpha + \bar{n} - 1}{\bar{n}} p^{\alpha} q^{\bar{n}}$$

con  $n = 0, 1, 2, \dots$  ed  $\alpha > 0$ .

Tale trasformazione formalmente e' ottenibile dalla (5.1) mediante la semplice sostituzione  $x - \alpha = \bar{n}$ . Infatti:

$$(5.3) \quad p(x) = \binom{x-1}{x-\alpha} p^{\alpha} q^{x-\alpha} \rightarrow p_{\bar{n}}(t) = \binom{\alpha + \bar{n} - 1}{\bar{n}} p^{\alpha} q^{\bar{n}}$$

Per quanto concerne la dipendenza di  $p_{\bar{n}}(t)$  dalla variabile temporale  $t$ , risulta in questo caso:  $q = \frac{1}{1 + \frac{t}{\alpha}}$ .

Al tendere di  $\alpha \rightarrow +\infty$ , con  $\alpha q = cost$ , la distribuzione Binomiale negativa converge a quella di Poisson con media  $\alpha q$ .

### 6. La distribuzione dei sinistri per importo del danno

Relativamente ad un rischio assicurato, indichiamo con  $\tilde{z}$  la variabile casuale *importo del danno* e con  $S(z) = Pr\{\tilde{z} \leq z\}$  la rispettiva funzione di ripartizione, ovvero la probabilita' che verificandosi un sinistro sia esso di importo minore od uguale a  $z$ . Si supponga altresì che l'operatore assicurativo sia in grado, mediante specifiche rilevazioni statistiche sul porta-

foglio, di stimare la distribuzione  $S(z)$  che in pratica può essere associata:

a)- ad una v.c. assolutamente continua  $\tilde{z}$  con funzione di densità

$$s(z) = \frac{d}{dz} S(z)$$

tale che pertanto con  $s(z)dz$  s'intende la probabilità che un sinistro sia di importo compreso tra  $z$  e  $z+dz$ ;

b)- ad una v.c. discreta, oppure ad una v.c. mista, opportuna combinazione di tipo assolutamente continuo e discreto.

Ad esempio, secondo l'impostazione di tipo misto, il momento  $k$ -simo rispetto all'origine risulta:

$$(6.1) \quad \mu_k = \int_0^{\infty} z^k s(z) dz + \sum_i z_i^k p_i$$

ovvero, in forma più compatta, tenendo presente i punti di discontinuità:

$$(6.2) \quad \mu_k = \int_0^{\infty} z^k dS(z)$$

Per  $k=1$

$$(6.3) \quad \mu_1 = \mu = \int_0^{\infty} z dS(z) = \int_0^{\infty} z s(z) dz$$

è definito *danno medio*.

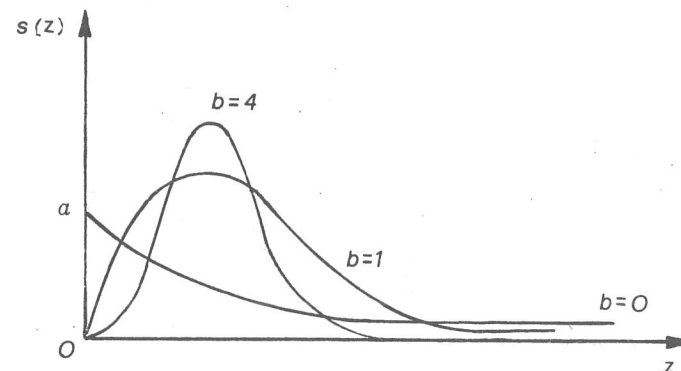
Nell'ipotesi di continuità e derivabilità della  $S(z)$  una prima buona approssimazione è fornita dalla funzione di ripartizione della variabile casuale esponenziale negativa:

$$(6.4) \quad S(z) = 1 - e^{-az} \quad (a > 0, z \geq 0)$$

In generale è possibile ottenere la funzione di densità  $s(z)$  della (6.4) dalla seguente densità, relativa ad una variabile casuale Gamma generalizzata, ponendo  $b=0$ :

$$(6.5) \quad \frac{d}{dz} S(z) = s(z) = \frac{a^{b+1}}{\Gamma(b+1)} z^b e^{-az} \quad (z \geq 0, b > -1)$$

Riportiamo nel grafico la struttura della (6.5) al variare di alcuni valori del parametro  $b$ :



In termini generali sia:

$$(6.6) \quad s(z) = \frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)} z^{\nu-1} e^{-\lambda z}$$

con  $\nu=b+1$ ,  $\lambda=a$ ,  $\Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} z^{\nu-1} e^{-z} dz$ . Se  $\nu$  è intero,  $\Gamma(\nu) = (\nu-1)!$

Nota la funzione generatrice dei momenti  $F_z(\alpha)$  della v.c. gamma, il calcolo della media e della varianza è immediato. Difatti, dato che

$$(6.7) \quad F_z(\alpha) = M(e^{\alpha z}) = \left( \frac{\lambda}{\lambda-\alpha} \right)^\nu$$

risulta:

$$(6.8) \quad M(z) = \frac{dF(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = \nu \left( \frac{\lambda}{\lambda-\alpha} \right)^{\nu-1} \frac{\lambda}{(\lambda-\alpha)^2} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\nu}{\lambda}$$

$$M(z^2) = \frac{d^2 F(\alpha)}{d\alpha^2} \Big|_{\alpha=0} = \nu(\nu-1) \left( \frac{\lambda}{\lambda-\alpha} \right)^{\nu-2} \frac{\lambda^2}{(\lambda-\alpha)^4} \Big|_{\alpha=0} + \nu \left( \frac{\lambda}{\lambda-\alpha} \right)^{\nu-1} \frac{2\lambda(\lambda-\alpha)}{(\lambda-\alpha)^4} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\nu^2}{\lambda^2} + \frac{\nu}{\lambda^2}$$

$$(6.9) \quad \sigma^2(z) = M(z^2) - M(z)^2 = \frac{\nu}{\lambda^2}.$$

Altre due funzioni di densita' approssimano bene il comportamento della variabile casuale  $\tilde{z}$ :

a)- la distribuzione del Pareto

$$s(z) = \frac{\alpha - 1}{z^\alpha} \quad 1 < z < +\infty, \quad \alpha > 2$$

b)- la distribuzione Logonormale

$$s(z) = \frac{1}{z\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log z - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

con  $\mu$  importo medio del danno.

E' importante notare che attraverso le distribuzioni delle variabili casuali  $\tilde{N}(t)$ , numero dei sinistri che possono colpire un rischio assicurato, e  $\tilde{z}$ , importo del danno, e' possibile affrontare il problema della quantificazione dell'onere per la Compagnia relativamente ad un portafoglio costituito da contratti indipendenti, omogenei e stabili; tale analisi viene svolta nel prossimo paragrafo. Quanto andremo considerando e in effetti la stima della responsabilita' dell'Impresa nei confronti di un rischio soggetto alla ripetibilita' dei possibili sinistri; il fatto di prendere in considerazione un ipotetico portafoglio e' soltanto dunque un *punto di vista* che accomuna impegni simili al fine di determinare univocamente la prestazione globale.

**7. La distribuzione generalizzata di Poisson**

Estendiamo l'analisi fin qui svolta considerando ora un ipotetico portafoglio  $\mathcal{P}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_k)$  costituito da  $k$  rischi indipendenti (piu' avanti formuleremo anche l'ipotesi di somiglianza tra le varie variabili casuali  $\tilde{z}_j$ , che in sostanza riflette la condizione di omogeneita'). Il problema che si inten-

de affrontare consiste nel determinare la distribuzione di probabilita'  $F(x, t)$  dell'importo totale dei sinistri  $\tilde{x}$ , che possono aver luogo durante un prefissato intervallo temporale di ampiezza  $t$ . La distribuzione del numero dei sinistri (variabile casuale  $\tilde{N}(t)$ ) si suppone poissoniana e la distribuzione  $S(z)$  relativa all'importo di un rischio sinistrato (variabile casuale  $\tilde{z}_j$ ) si suppone nota, del tipo in precedenza trattato.

La funzione di ripartizione da esaminare sia dunque  $F(x, t) = Pr\{\tilde{x}(t) \leq x\}$ , ovvero la probabilita' del verificarsi di un evento dannoso  $\tilde{x}(t) = \tilde{x} \leq x$ . Tale evento composto, qualora si tenga presente l'ipotesi di ripetibilita', puo' verificarsi secondo le seguenti modalita':

- 1)- nell'intervallo  $t$  nessun sinistro si verifica;
  - 2)- si verifica un solo sinistro,  $N(t) = 1$ , e l'importo corrispondente risulta  $\leq x$ ;
  - 3)- si verificano due sinistri,  $N(t) = 2$ , e l'importo totale risulta  $\leq x$ ;
- etc.....

Cio' posto, indichiamo con  $p_k(t)$  la probabilita' che si abbiano  $k$  sinistri e con  $S_k(x)$  la probabilita' condizionata che, allorchando il numero dei sinistri sia esattamente uguale a  $k$ , la somma dei danni sia  $\leq x$ .

Si ottiene pertanto per quanto concerne la funzione di ripartizione  $F(x, t)$  della variabile casuale  $\tilde{x}$ :

$$(7.1) \quad F(x, t) = \sum_0^{\infty} p_k(t) S_k(x)$$

Se si formula l'ulteriore ipotesi che gli importi dei singoli sinistri  $\tilde{z}_j$  ( $j=1, 2, \dots, k$ ) siano somiglianti, cioe' a dire con medesima distribuzione, allora la funzione  $S_k(x)$  nella (7.1) e' notoriamente la  $k$ -sima convoluzione di  $S(x)$ , la quale puo' essere determinata per via ricorrente:

$$(7.2) \quad S_k(x) = \int_0^x S_{k-1}(x-z) dS(z) \stackrel{def}{=} S^{k*}(x)$$

Sostituendo nella (7.1) alla probabilità  $p_k(t)$  l'espressione di Poisson e tenendo presente la (7.2) si ricava infine la seguente funzione di ripartizione, definita *funzione di Poisson generalizzata*:

$$(7.3) \quad F(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_0^{\infty} p_k(t) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} S^{k*}(x)$$

In altri termini la (7.3), tenendo conto sia della numerosità che dell'importo dei sinistri, generalizza per l'appunto la situazione in cui un rischio venga sottoposto ad evento dannoso ripetibile con esborso di un risarcimento unitario.

Alcune osservazioni si rendono opportune a proposito dell'operazione di convoluzione (v. Appendice al Capitolo Primo)  $S^{k*}(x)$ . Prima di tutto la  $k$ -sima convoluzione di  $S(x)$  può essere data da:

$$(7.4) \quad S^{k*}(x) = \int_0^x S^{(k-1)*}(x-z) dS(z)$$

per  $k=1, 2, 3, \dots$  dove pertanto  $S^{k*}(x)$  è la funzione di ripartizione della somma di  $k$  distinte variabili casuali *importo del danno*

$$\tilde{x}_k = \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 + \tilde{z}_3 + \dots + \tilde{z}_k = \sum_1^k \tilde{z}_j$$

distribuite secondo  $S(z)$ . Poniamo  $S^{1*}(x) = S(x)$  con  $S(0) = 0$ ; e dal momento che ciò implica  $S^{k*}(0) = 0$ , definiamo per quanto seguirà:

$$S^{0*}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Vediamo ora, come immediata applicazione, la trasformazione esplicita della funzione generalizzata di Poisson nell'ipotesi di distribuzione esponenziale negativa della variabile casuale  $\tilde{z}_j$ . A tal fine, per la (7.3):

$$(7.5) \quad F(x, t) = \sum_0^{\infty} p_k(t) S^{k*}(x) = \sum_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} S^{k*}(x)$$

Ricordando che la funzione di ripartizione della v.c. danno è

$$S(z) = 1 - e^{-z} \quad (z \geq 0; a=1)$$

si ricava prima di tutto la convoluzione  $S^{k*}(x)$  dalla relazione ricorrente (7.4). Per  $k=2$ , tenendo presente che  $S^{1*}(x) = S(x)$ :

$$(7.6) \quad S^{2*}(x) = \int_0^x S(x-z) dS(z) = \int_0^x \{1 - e^{-(x-z)}\} e^{-z} dz = 1 - e^{-x} (1+x)$$

Ripetendo la medesima procedura per ulteriori valori di  $k$ , si ottiene in generale:

$$(7.7) \quad S^{k*}(x) = 1 - e^{-x} \sum_0^{k-1} \frac{x^j}{j!} \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

e quindi possiamo scrivere, per la (7.5):

$$(7.8) \quad F(x, t) = e^{-t} + \sum_1^{\infty} p_k(t) e^{-t} \frac{t^k}{k!} \left[ 1 - e^{-x} \sum_0^{k-1} \frac{x^j}{j!} \right]$$

laddove si è posto per semplicità  $\lambda=1$ , ed il primo termine  $e^{-t}$  a secondo membro della (7.8) è il valore della  $F(x, t)$  nella (7.5) per  $k=0$ . Data la complessità dello sviluppo successivo della (7.8), riportiamo per comodità del lettore soltanto il risultato terminale, ovvero:

$$(7.9) \quad F(x, t) = 1 - e^{-x} \int_0^t e^{-s} I_0(2\sqrt{xs}) dx$$

in cui  $I_0(\cdot)$  è una funzione di Bessel modificata.

### 8. I parametri fondamentali

Al fine di poter calcolare il risarcimento globale medio  $E(x)$  ed il valore di dispersione intorno ad esso, la varianza  $\sigma^2(x)$ , si procede con il considerare di nuovo la somma  $\tilde{x}_k = \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 + \dots + \tilde{z}_k$ . Poniamo dunque con

$$(8.1) \quad \mu = \int_0^{\infty} z dS(z)$$

la media di ciascuna variabile casuale importo del danno  $\tilde{z}_j$  nella condizione già espressa nel precedente paragrafo di indipendenza e somiglianza. Posto ancora con  $S^{k*}(x)$  la funzione di ripartizione della somma  $\tilde{x}_k$ , avremo naturalmente  $E(x_k) = k\mu$ . Dalla (7.3)

$$F(x, t) = \sum_{0 \leq k} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} S^{k*}(x)$$

con la posizione  $\lambda t = n$ , possiamo scrivere:

$$(8.2) \quad F(x, t) = \sum_{0 \leq k} e^{-n} \frac{n^k}{k!} S^{k*}(x)$$

Vogliamo determinare  $E(x)$  e verificare che risulta:

$$(8.3) \quad E(x) = \lambda t \mu = n \mu$$

Infatti:

$$(8.4) \quad E(x) = \int_0^{\infty} x dF(x, t) = \sum_{0 \leq k} e^{-n} \frac{n^k}{k!} \int_0^{\infty} x dS^{k*}(x) = \sum_{0 \leq k} e^{-n} \frac{n^k}{k!} k \mu$$

e notando che

$$(8.5) \quad \sum_{0 \leq k} e^{-n} \frac{n^k}{k!} k = n = \lambda t$$

quindi l'asserto (8.3).

Indichiamo ora con  $\mu_2$  il momento secondo rispetto all'origine della generica variabile aleatoria  $\tilde{z}_j$ , vale a dire:

$$\mu_2 = \int_0^{\infty} z^2 dS(z)$$

Poiché si è formulata l'ipotesi di indipendenza e somiglianza, è possibile determinare tale momento per la variabile casuale  $\tilde{x}_k$ :

$$(8.6) \quad E(x_k^2) = \int_0^{\infty} x^2 dS^{k*}(x) = k\mu_2 - k\mu^2 + k^2\mu^2 = k\mu_2 + k(k-1)\mu^2$$

Da quanto esposto si ricava pertanto il momento secondo della variabile casuale  $\tilde{x}$ :

$$(8.7) \quad E(x^2) = \int_0^{\infty} x^2 dF(x, t) = e^{-n} \left[ \mu_2 \sum_{0 \leq k} k \frac{n^k}{k!} + \mu^2 \sum_{0 \leq k} \frac{k(k-1)n^k}{k!} \right] = n\mu_2 + n^2\mu^2$$

In definitiva, ricordando che  $\sigma^2(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$ , segue:

$$(8.8) \quad \sigma^2(x) = \int_0^{\infty} (x - n\mu)^2 dF(x, t) = \lambda t \mu_2 = n \mu_2$$



A P P E N D I C E

A.1 La v.c. di Bernoulli

Sia  $\tilde{x}$  una variabile casuale discreta suscettibile di assumere le possibili determinazioni (0, 1), ad esempio se  $\tilde{x}$  e' la v.c. numero dei sinistri zero rappresenta il non verificarsi dell'evento mentre uno il verificarsi di un solo evento. Associata a ciascuna determinazione la probabilita' p e q=1-p, si avra' il seguente schema:

$$p(x) = \begin{cases} p & \text{se } x = 1 \\ q = 1-p & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

ed in una prova

$$(A - 1.1) \quad p(x) = p^x (1-p)^{1-x} \\ x = 0, 1 \quad 0 < p < 1$$

dove p si suppone invariante (indipendenza quindi delle prove).

La v.c. di Bernoulli gode delle seguenti proprieta' caratteristiche:

- a)- funzione generatrice delle probabilita'  $G(z) = pz + (1-p)$
- b)-  $E(x) = p \quad var(x) = p(1-p) = pq$

Dalla combinazione lineare di n v.c. di Bernoulli indipendenti si ottiene la variabile casuale Binomiale, come appresso specificato.

A.2 La v.c. Binomiale

Consideriamo un esperimento consistente in n indipendenti sottoprove bernoulliane; vale a dire il risultato di ciascuna prova sia di tipo booleano (0, 1). Sia  $\tilde{x}$  la v.c. indicante il numero di successi nelle n prove. Posto con  $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n$  ( $\tilde{y}_i = 0, 1$ )

ogni variabile bernoulliana, si ottiene:

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^n \tilde{y}_i$$

con probabilita'

$$(A - 2.1) \quad p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \\ n = 1, 2, 3, \dots \quad x = 0, 1, 2, \dots, n \quad 0 < p < 1$$

Sussistono in questo caso le seguenti proprieta':

- a)- funzione generatrice delle probabilita'  $G(z) = [pz + (1-p)]^n$
- b)-  $E(x) = np \quad var(x) = npq$

A.3 La v.c. Geometrica

Analogamente alla v.c. binomiale, la variabile casuale geometrica e' collegata alla v.c. di Bernoulli. Sia  $\tilde{x}$  pertanto la v.c. rappresentante il numero di prove bernoulliane ( $\tilde{x}=1, 2, 3, \dots$ ) necessarie per ottenere il primo successo (determinazione 1). Posto con p la probabilita' di ottenere uno in ogni prova bernoulliana e con q=1-p la probabilita' contraria di ottenere zero, nel caso in cui uno appare alla x-sima prova, si avra':

$$(A - 3.1) \quad p(x) = p(1-p)^{x-1} \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

In questo caso ricordiamo che:

- a)- funzione generatrice delle probabilita'  $G(z) = \frac{pz}{1-z(1-p)}$
- b)-  $E(x) = 1/p \quad var(x) = q/p^2$

Dalla combinazione lineare di n v.c. Geometriche si ottiene la variabile casuale Binomiale negativa.

A.4 L'operazione di convoluzione

Si supponga, per fissare le idee, di considerare le successioni numeriche

$$(A - 4.1) \quad \{a_k\} = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots\}$$

$$\{b_k\} = \{b_0, b_1, b_2, \dots, b_k, \dots\}$$

Def.

La successione  $\{c_k\} = \{c_0, \dots, c_k, \dots\}$  e' definita *convoluzione* tra  $\{a_k\}$  e  $\{b_k\}$ , e scriveremo

$$(A - 4.2) \quad \{c_k\} = \{a_k\} * \{b_k\}$$

dove il termine generico  $k$ -simo di  $\{c_k\}$  risulta:

$$c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \quad (b_{k-1}=0 \text{ se } k-i < 0); \quad c_0 = a_0 b_0;$$

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0; \quad c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \dots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$$

L'operazione di convoluzione  $*$  gode della proprieta' commutativa, associativa e distributiva rispetto alla somma:

$$\{a_k\} * \{b_k\} = \{b_k\} * \{a_k\}; \quad [\{a_k\} * \{b_k\}] * \{c_k\} = \{a_k\} * [\{b_k\} * \{c_k\}];$$

$$\{a_k\} * \{b_k + c_k\} = \{a_k\} * \{b_k\} + \{a_k\} * \{c_k\}$$

Inoltre la convoluzione di  $\{a_k\}$  con se stessa effettuata  $n$  volte porta alla convoluzione  $n$ -pla, cioe':

$$(A - 4.3) \quad \{a_k\} * \{a_k\} * \dots * \{a_k\} = \{a_k\}^{n*}$$

e per l'associativita' vale la relazione

$$(A - 4.4) \quad \{a_k\}^{n*} = \{a_k\}^{(n-1)*} * \{a_k\}$$

che si e' avuto modo di applicare nel caso continuo.

Siano, ad esempio,  $\tilde{x}_1$  e  $\tilde{x}_2$  due variabili casuali indipendenti che possono assumere le determinazioni  $0, 1, 2, \dots$  con probabilita' rispettivamente

$$Pr\{\tilde{x}_1=k\} = a_k \quad \text{e} \quad Pr\{\tilde{x}_2=k\} = b_k$$

La variabile aleatoria  $\tilde{S} = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$  puo' pertanto assumere le determinazioni  $0, 1, 2, \dots$  con probabilita':

$$P_0 = Pr\{(\tilde{x}_1=0) \cup (\tilde{x}_2=0)\} = a_0 b_0$$

$$P_1 = Pr\{(\tilde{x}_1=0) \cup (\tilde{x}_2=1)\} + Pr\{(\tilde{x}_1=1) \cup (\tilde{x}_2=0)\} = a_0 b_1 + a_1 b_0$$

$$P_k = Pr\{(\tilde{x}_1=0) \cup (\tilde{x}_2=k)\} + Pr\{(\tilde{x}_1=1) \cup (\tilde{x}_2=k-1)\} + \dots + Pr\{(\tilde{x}_1=k) \cup (\tilde{x}_2=0)\} =$$

$$= a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0$$

Si noti, quindi, che la successione  $\{P_k\}$  delle probabilita' della v.c.  $\tilde{S}$  e' il risultato della convoluzione tra le successioni  $\{a_k\}$  e  $\{b_k\}$  delle probabilita' di  $\tilde{x}_1$  e  $\tilde{x}_2$ :

$$(A - 4.5) \quad \{P_k\} = \{a_k\} * \{b_k\}$$

Nel caso poi particolare che  $n$  variabili casuali siano indipendenti e somiglianti, cioe' tutte con uguale probabilita'  $a_k$ , la somma di esse  $\tilde{S}$  ammette come successione delle probabilita' la convoluzione  $n$ -pla della  $\{a_k\}$ :

$$(A - 4.6) \quad \{P_k\} = \{a_k\}^{n*}$$

Analoghe considerazioni possono essere svolte agevolmente qualora si tratti con variabili casuali assolutamente continue. Date quindi due v.c.  $\tilde{x}$  ed  $\tilde{y}$  con funzione di ripartizione  $\Phi(x)$  e  $\psi(y)$ , la convoluzione tra le due risulta:

$$(A - 4.7) \quad \Phi * \psi(k) = Pr\{\tilde{x} + \tilde{y} < k\} = \iint_{x+y < k} d\Phi(x) \psi(y)$$

Applicando a tale relazione il Teorema di Fubini, si ricava:

$$(A - 4.8) \quad \Phi * \psi(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{k-x} d\psi(y) d\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(k-x) d\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(k-y) d\psi(y)$$

Nel caso in cui infine si considerino  $n$  v.c. indipendenti e somiglianti con funzioni di ripartizione  $\Phi(x)$  si avra':

$$\Phi_1 * \Phi_2 * \dots * \Phi_n(k) = \Phi^{n*}(k)$$

Capitolo Secondo

IL PREMIO NELLE ASSICURAZIONI RAMI ELEMENTARI

1. Considerazioni generali

Si e' visto nel precedente capitolo quali siano i fondamenti probabilistici che costituiscono la base tecnica per il calcolo delle prestazioni assicurative. Sempre rimanendo in un intervallo di gestione prefissato [0, t], al fine di pervenire ad una formulazione organica del premio puro necessario a garantire le possibili coperture, occorre premettere alcune considerazioni che andremo nel prosieguo sviluppando. In primo luogo il premio viene calcolato, salvo delle varianti, in base al principio di equivalenza attuariale il quale concretamente si traduce nel valore zero della somma algebrica delle speranze matematiche dei contraenti, e quindi nella posta che ciascuno di essi dovrebbe disporre per partecipare ad un gioco equo. Ricordando allora che una generica situazione di rischio e' rappresentata da

(1.1) rho\_{[0, t]} = {N-tilde(t); x-tilde(t)}

ovvero dalla distribuzione dell'importo dei futuri sinistri F(x, t), il premio pi\_g di equilibrio attuariale risulta, in base a quanto detto:

(1.2) pi\_g def integral\_0^inf x dF(x, t) = lambda t integral\_0^inf z dS(z) = lambda t mu

dove si e' indicato con mu = integral\_0^inf z dS(z) il danno medio relativamente ad ogni rischio assicurato, e con lambda t il numero medio di si-

nistri che possono colpire il rischio nell'intervallo di ampiezza t nella ipotesi di ripetibilita'.

2. I criteri di valutazione del premio

Il premio, relativo ad un periodo di osservazione [0, t] che in concreto si traduce nel periodo di ampiezza unitaria (un anno solare), puo' essere considerato dunque come l'equivalente certo che un individuo e' disposto a pagare per partecipare ad un gioco equo. Indichiamo con C una trasformazione applicata alla distribuzione F(x, t); ovvero, per evidenziare l'operazione di scambio di un importo certo pi con un esborso aleatorio x-tilde, poniamo:

(2.1) C : pi\_g = C[F(x, t)]

sempre nell'ipotesi di un portafoglio costituito da rischi omogenei ed indipendenti. Tra le possibili trasformazioni C ricordiamo, come criteri di valutazione, le seguenti posizioni:

a)- Il principio del valor medio

In questo caso

(2.2) C[F(x, t)] = (1+c\_0)E(x) = (1+c\_0) [ integral\_0^inf z dS(z) ] lambda t = (1+c\_0) lambda t mu

laddove si e' posto con c\_0 un opportuno caricamento di sicurezza.

b)- Il principio di deviazione standard

Secondo tale principio si considera sia la media che lo scarto quadratico medio della variabile casuale danno. Vale a dire:

(2.3) C[F(x, t)] = E(x) + beta sigma(x) = lambda t mu + beta sqrt(lambda t mu\_2)

dove come e' noto

mu\_2 = integral\_0^inf z^2 dS(z)

c)- *Il principio dell'utilita' attesa*

Con riferimento ad una funzione di utilita' cardinale  $u(\cdot)$  di tipo convesso, ovvero tale che  $u'(\cdot) > 0$  ed  $u''(\cdot) < 0$ , il premio  $\pi$  viene determinato dalla seguente condizione:

$$(2.4) \quad E[u(\pi-x)] = u(0)$$

la quale stabilisce per l'Impresa una equivalenza tra l'utilita' attesa afferente alla condizione rischiosa propria dell'assicurabilita' di un rischio e l'utilita' di un importo nullo in condizioni di certezza. Questo particolare aspetto verra' analizzato nel Capitolo Terzo; per il momento ci soffermeremo sulla determinazione del premio  $\pi$  secondo il principio di cui al punto a) trascurando il caricamento di sicurezza.

✓ **3. Le limitazioni della copertura assicurativa**

Quanto esposto ci consente di esaminare la formulazione del premio puro sia in caso di copertura illimitata sia nella condizione, usuale nel rapporto assicurativo, di una limitazione superiore (massimale) ed inferiore (franchigia assoluta o relativa). Supponendo  $t=1$ , il premio in assenza di limitazioni per la (1.2) risulta pertanto:

$$(3.1) \quad \pi = \lambda \int_0^{\infty} z dS(z) = \lambda \int_0^{\infty} z s(z) dz = \lambda \mu$$

Nel caso in cui si preveda l'istituzione di un massimale  $m$ , in luogo della (3.1) si avra':

$$(3.2) \quad \pi(m) = \lambda \left[ \int_0^m z s(z) dz + m \int_m^{\infty} s(z) dz \right] = \lambda \mu(m)$$

in cui  $\mu(m)$  e' definito *risarcimento medio*:

$$(3.3) \quad \mu(m) = \int_0^m z s(z) dz + m \int_m^{\infty} s(z) dz = \int_0^m z dS(z) + m[1-S(m)]$$

Introducendo ora una franchigia assoluta  $k_a$  la (3.2) diventa:

$$(3.4) \quad \pi(k_a, m) = \lambda \left[ \int_{k_a}^m (z-k_a) dS(z) + (m-k_a) \int_m^{\infty} dS(z) \right] = \lambda \mu(k_a, m)$$

mentre con franchigia relativa  $k_r$ :

$$(3.5) \quad \pi(k_r, m) = \lambda \left[ \int_{k_r}^m z dS(z) + m \int_m^{\infty} dS(z) \right] = \lambda \mu(k_r, m)$$

Occorre sottolineare che il premio puo' essere anche determinato non facendo riferimento ad una distribuzione di probabilita'  $S(z)$ , bensì ad una distribuzione di frequenza  $\varphi(z)$  dell'importo dei sinistri, desunta da appropriate indagini statistiche sul portafoglio assicurato. Indichiamo pertanto con:

$N$  = numero dei rischi (polizze) indipendenti ed omogenei costituenti il portafoglio;

$n$  = numero dei sinistri osservati;

$\frac{n}{N}$  = numero medio di sinistri imputabili ad un rischio assicurato;

$\varphi(z) dz$  = numero di sinistri il cui importo e' compreso tra  $z$  e  $z+dz$ .

Il danno totale ed il danno medio divengono allora rispettivamente:

$$(3.6) \quad A \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} z \varphi(z) dz \quad ; \quad a \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \int_0^{\infty} z \varphi(z) dz$$

Dalla (3.6) e' immediato il calcolo del premio puro:

$$(3.7) \quad \pi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A}{N} = \frac{n}{N} a = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} z \varphi(z) dz$$

In presenza di massimale  $m$  dovremo invece considerare il risarcimento totale ed il risarcimento medio:

$$(3.8) \quad A(m) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^m z\varphi(z) dz + m \int_m^\infty \varphi(z) dz \quad ; \quad a(m) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} A(m)$$

da cui l'espressione del premio

$$(3.9) \quad \pi(m) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A(m)}{N} = \frac{n}{N} a(m) = \frac{1}{N} \left[ \int_0^m z\varphi(z) dz + m \int_m^\infty \varphi(z) dz \right]$$

E' ovvia l'estensione della (3.9) qualora si introduca una franchigia assoluta o relativa:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \pi(k_a, m) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{A(k_a, m)}{N} = \frac{n}{N} a(k_a, m) \\ \pi(k_r, m) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{A(k_r, m)}{N} = \frac{n}{N} a(k_r, m) \end{aligned}$$

dove

$$(3.11) \quad \begin{aligned} a(k_a, m) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \left[ \int_{k_a}^m (z - k_a) \varphi(z) dz + (m - k_a) \int_m^\infty \varphi(z) dz \right] \\ a(k_r, m) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \left[ \int_{k_r}^m z\varphi(z) dz + m \int_m^\infty \varphi(z) dz \right] \end{aligned}$$

E' interessante a questo punto osservare come viene scomposto il premio attraverso le sue componenti al fine di evidenziare la possibilita' del ripetersi dell'evento dannoso. Indichiamo allora con:

$v$  = numero dei rischi sinistrati, cioe' i rischi che hanno provocato gli  $n$  sinistri ( $v \leq n$ );  
 $\alpha = \frac{n}{v}$  = numero medio dei sinistri imputabili ad ogni rischio sinistrato ( $\alpha = 1$  se il fenomeno e' non ripetibile);  
 $\frac{v}{N}$  = frequenza dei rischi sinistrati, cioe' la frequenza o probabilita' statistica che un rischio assicurato provochi nell'anno almeno un sinistro.

La determinazione del premio, quindi, riferendoci alla sola limitazione del massimale, risulta cosi' scomposta:

$$(3.12) \quad \pi(m) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{v}{N} \alpha a(m) = \frac{v}{N} \alpha \frac{\int_0^m z\varphi(z) dz + m \int_m^\infty \varphi(z) dz}{n}$$

Dal confronto di tale espressione con la (3.2) si rileva immediatamente che quest'ultima e' una misura piu' sintetica resa possibile soltanto mediante le ipotesi che stanno alla base del processo di Poisson. Si ricorda inoltre che nella terminologia tecnica i rapporti  $n/N$ ,  $v/N$ ,  $n/v$ , sono definiti rispettivamente *coefficiente sinistri*, *frequenza dei rischi colpiti* e *coefficiente di ripetibilita'*.

#### 4. Le basi empiriche

Si e' analizzata fin'ora la formulazione del premio puro  $\pi$  basandoci sulla conoscenza della funzione di ripartizione  $S(z)$  oppure sulla struttura analitica di una funzione di frequenza  $\varphi(z)$  relativa ad un portafoglio assicurato di  $N$  contratti. In pratica una Compagnia dispone di rilevazioni statistiche discrete riguardanti un portafoglio ripartito in classi di rischio, e dall'esame delle varie componenti della sinistrosita' e' possibile determinare, facendo riferimento a termini monetari di esposizione, la *quota danni*  $\tau$ , vale a dire il tasso di premio necessario a copertura degli impegni contrattuali. Si supponga pertanto di disporre dei dati riportati nel prospetto che segue per  $m$  classi di rischio: nella prima colonna sono presenti i valori centrali  $c_i$  delle somme assicurate per ogni classe; nella seconda, il numero dei rischi assunti  $N_i$ ; nella terza, l'esposizione totale  $C_i = c_i N_i$  (somma assicurata globale in ogni classe); nella quarta, il numero dei sinistri  $n_i$ ; nella quinta, le somme sinistrate  $V_i = c_i n_i$ ; ed infine nella sesta colonna vengono riportati gli importi dei sinistri  $A_i$  in ogni classe di appartenenza.



Classi di rischio	Somma assicurata	Numero dei rischi	Esposizione totale	Numero dei sinistri	Somme sinistrate	Importo dei sinistri
1	$c_1$	$N_1$	$C_1 = c_1 N_1$	$n_1$	$V_1 = c_1 n_1$	$A_1$
2	$c_2$	$N_2$	$C_2 = c_2 N_2$	$n_2$	$V_2 = c_2 n_2$	$A_2$
$i$	$c_i$	$N_i$	$C_i = c_i N_i$	$n_i$	$V_i = c_i n_i$	$A_i$
...	...	...	...	...	...	...
$m$	$c_m$	$N_m$	$C_m = c_m N_m$	$n_m$	$V_m = c_m n_m$	$A_m$
$N = \sum_{i=1}^m N_i$			$C = \sum_{i=1}^m C_i = \sum_{i=1}^m c_i N_i$		$V = \sum_{i=1}^m V_i = \sum_{i=1}^m c_i n_i$	
$N = \sum_{i=1}^m N_i$			$C = \sum_{i=1}^m c_i N_i$		$V = \sum_{i=1}^m c_i n_i$	

La quota danni risulta quindi fornita dal rapporto *totale danni/totale esposizioni*:

$$(4.1) \quad \tau \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A}{C} = \frac{\sum_{i=1}^m A_i}{\sum_{i=1}^m C_i} = \frac{\sum_{i=1}^m A_i}{\sum_{i=1}^m c_i N_i}$$

E' possibile scomporre la (4.1) attraverso le componenti di rischio come gia' visto per il premio  $\pi$ . Infatti, ponendo con

$$(4.2) \quad p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n}{N} = \frac{\sum_{i=1}^m n_i}{\sum_{i=1}^m N_i}$$

la probabilita' di danno,

$$(4.3) \quad K \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A}{V} = \frac{\sum_{i=1}^m A_i}{\sum_{i=1}^m V_i} = \frac{\sum_{i=1}^m A_i}{\sum_{i=1}^m c_i n_i}$$

il *grado di danno*, cioe' a dire la porzione media distrutta da danni delle somme assicurate colpite (somme sinistrate),

$$(4.4) \quad \bar{C} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{C}{N} = \frac{\sum_{i=1}^m C_i}{\sum_{i=1}^m N_i} = \frac{\sum_{i=1}^m c_i N_i}{\sum_{i=1}^m N_i}$$

$$\bar{V} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{V}{n} = \frac{\sum_{i=1}^m V_i}{\sum_{i=1}^m n_i} = \frac{\sum_{i=1}^m c_i n_i}{\sum_{i=1}^m n_i}$$

la somma assicurata media ( $\bar{C}$ ) e la somma assicurata media colpita da danno ( $\bar{V}$ ),

$$(4.5) \quad g \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\bar{V}}{\bar{C}} = \frac{\frac{\sum_1^m c_i n_i}{\sum_1^m n_i}}{\frac{\sum_1^m c_i N_i}{\sum_1^m N_i}}$$

il peso del rischio colpito, ovvero l'incidenza della somma sinistrata media sulla somma assicurata media, la (4.1) può essere quindi scritta:

$$(4.6) \quad \tau = \frac{A}{C} = \frac{KV}{C} = \frac{Kn\bar{V}}{CN} = pKg$$

la quale pone in evidenza come la quota danni sia in sostanza la risultante di tre fattori o componenti di rischio; la probabilità di danno o coefficiente sinistri ( $p$ ), il grado di danno ( $K$ ) ed il peso del rischio colpito ( $g$ ).

E' immediata, da quanto esposto, la relazione intercorrente tra  $\tau$  e  $\pi$ . Infatti, ricordando che:

$$(4.7) \quad \pi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A}{N} = \frac{\sum_1^m A_i}{\sum_1^m N_i}$$

dividendo per  $N$  il numeratore ed il denominatore della (4.1):

$$(4.8) \quad \pi = \tau \cdot \frac{C}{N} = \tau \frac{\sum_1^m C_i}{\sum_1^m N_i} = \tau \frac{\sum_1^m c_i N_i}{\sum_1^m N_i}$$

Nel caso particolare che in ciascuna classe si consideri la stessa somma assicurata  $c_i = c$ , allora

$$C = \sum_1^m c_i N_i = c \sum_1^m N_i = cN$$

e pertanto la ovvia relazione  $\pi = \tau c$ .

## 5. L'influenza monetaria

Le variazioni del potere di acquisto della moneta alterano nel tempo i rapporti tra Impresa ed assicurati, dando origine come primo problema di interesse all'analisi dell'utile o della perdita di congiuntura della Compagnia derivante dalla differenza, tra ciò che si dovrebbe pagare (in termini reali) e ciò che in effetti si paga, nell'ipotesi che il contraente faccia fronte ai propri obblighi contrattuali mediante il versamento di un premio costante.

Si considerino pertanto due distinte epoche di valutazione  $t_0$  e  $t_1$  ed indichiamo con  $z$  e  $\xi$  la valutazione monetaria di un danno nella stessa gravità in  $t_0$  ed in  $t_1$ .

Sia

$$(5.1) \quad \rho \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P_{t_1}}{P_{t_0}} \geq 1$$

l'indice unitario della variazione dei prezzi da  $t_0$  a  $t_1$ , il quale se maggiore dell'unità riflette una situazione di perdita del potere di acquisto della moneta (inflazione), se uguale all'unità il potere di acquisto e' costante, ed infine se inferiore all'unità un recupero del potere di acquisto (rivalutazione). In media risulta:

$$\xi = \rho z$$

che pone in relazione la valutazione  $\xi$  in  $t_1$  alla valutazione  $z$  in  $t_0$ . Si supponga ora che per un determinato rischio con massima nominale  $m$  il contraente paghi da  $t_0$  a  $t_1$ , con scadenza periodale, il premio pattuito costante

$$(5.2) \quad \pi(m) = \frac{n}{N} a(m) = \frac{1}{N} \left[ \int_0^m z\varphi(z) dz + m \int_m^\infty \varphi(z) dz \right]$$

dove  $\varphi(z)$  e' la distribuzione di frequenza dei sinistri valutata in  $t_0$ . In effetti il contraente dovrebbe pagare in  $t_1$  il premio

$$(5.3) \quad \bar{\pi}(m) = \frac{n}{N} \bar{a}(m) = \frac{1}{N} \left[ \int_0^m \xi g(\xi) d\xi + m \int_m^\infty g(\xi) d\xi \right]$$

in cui  $g(\xi)$  e' la distribuzione di frequenza dei sinistri valutata in  $t_1$ . Si noti l'ipotesi implicita

$$(5.4) \quad \frac{n}{N} \Big|_{t=t_0} = \frac{n}{N} \Big|_{t=t_1}$$

di invarianza del coefficiente sinistri.

Il problema in esame consiste dunque nell'analisi della differenza

$$(5.5) \quad d(m, \rho) \stackrel{def}{=} \bar{\pi}(m) - \pi(m)$$

la quale esprime l'utile o la perdita di congiuntura all'epoca  $t_1$ ; vale a dire lo scarto tra quanto la Compagnia dovrebbe incassare e quanto in realta' introita. A tal fine si supponga che la ripartizione dei sinistri secondo la gravita' dei danni da ognuno di essi causati sia la medesima in  $t_0$  e  $t_1$ :

$$(5.6) \quad \varphi(z) \Big|_{t=t_0} \sim g(\xi) \Big|_{t=t_1}$$

Tenendo presente la (5.3) e la (5.2), la (5.5) diventa:

$$(5.7) \quad d(m, \rho) = \frac{n}{N} [\bar{a}(m) - a(m)]$$

Al fine di pervenire ad un'espressione compatta della differenza tra i due risarcimenti medi  $\bar{a}(m)$  ed  $a(m)$ , per l'ipotesi addotta si ha:

$$(5.8) \quad \int_0^\xi g(u) du = \int_0^z \varphi(u) du = \int_0^{\frac{\xi}{\rho}} \varphi(u) du$$

Derivando ambedue i membri rispetto a  $\xi$ :

$$g(\xi) = \frac{1}{\rho} \varphi\left(\frac{\xi}{\rho}\right)$$

E pertanto e' possibile cosi' scrivere il risarcimento medio  $\bar{a}(m)$ :

$$(5.9) \quad \begin{aligned} \bar{a}(m) &= \frac{1}{n} \left[ \int_0^m \xi g(\xi) d\xi + m \int_m^\infty g(\xi) d\xi \right] = \\ &= \frac{1}{n} \left[ \int_0^m \frac{\xi}{\rho} \varphi\left(\frac{\xi}{\rho}\right) d\xi + m \int_m^\infty \frac{1}{\rho} \varphi\left(\frac{\xi}{\rho}\right) d\xi \right] \end{aligned}$$

La (5.9) esprime il risarcimento medio in  $t_1$  mediante la distribuzione di frequenza  $\varphi(\cdot)$  adottata in  $t_0$ . Ricordando la trasformazione  $z = \xi/\rho$ , si ha:

$$\xi = z\rho \quad ; \quad d\xi = \rho dz$$

e sostituendo nella (5.9):

$$(5.10) \quad \bar{a}(m) = \frac{1}{n} \left[ \rho \int_0^{\frac{m}{\rho}} z\varphi(z) dz + m \int_{\frac{m}{\rho}}^\infty \varphi(z) dz \right]$$

oppure

$$(5.11) \quad \bar{a}(m) = \frac{\rho}{n} \left[ \int_0^{\frac{m}{\rho}} z\varphi(z) dz + \frac{m}{\rho} \int_{\frac{m}{\rho}}^\infty \varphi(z) dz \right] = \rho a\left(\frac{m}{\rho}\right)$$

In base alla (5.11) il premio che si dovrebbe pagare diventa:

$$(5.12) \quad \bar{\pi}(m) = \frac{n}{N} \bar{a}(m) = \frac{n}{N} \rho a\left(\frac{m}{\rho}\right) = \rho \pi\left(\frac{m}{\rho}\right)$$

vale a dire il premio in  $t_0$  relativo ad un massimale  $m/\rho$  ancorato all'indice di variazione dei prezzi  $\rho$ . Per la (5.7), tenendo presente la (5.11), otteniamo:

$$(5.13) \quad d(m, \rho) \stackrel{def}{=} \bar{\pi}(m) - \pi(m) =$$

$$= \frac{n}{N} \left\{ \frac{\rho}{n} \left[ \int_0^{\frac{m}{\rho}} z\varphi(z) dz + \frac{m}{\rho} \int_{\frac{m}{\rho}}^{\infty} \varphi(z) dz \right] - \frac{1}{n} \left[ \int_0^m z\varphi(z) dz + m \int_m^{\infty} \varphi(z) dz \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{N} \left\{ \rho \int_0^{\frac{m}{\rho}} z\varphi(z) dz + m \int_{\frac{m}{\rho}}^{\infty} \varphi(z) dz - \int_0^m z\varphi(z) dz - m \int_m^{\infty} \varphi(z) dz \right\}$$

Ma risulta:

$$(5.14) \quad \int_0^m z\varphi(z) dz = \int_0^{\frac{m}{\rho}} z\varphi(z) dz + \int_{\frac{m}{\rho}}^m z\varphi(z) dz$$

$$m \int_{\frac{m}{\rho}}^{\infty} \varphi(z) dz - m \int_m^{\infty} \varphi(z) dz = m \int_{\frac{m}{\rho}}^m \varphi(z) dz$$

Sostituendo quindi nella (5.13) e semplificando si ricava infine:

$$(5.15) \quad d(m, \rho) = \frac{1}{N} \left[ (\rho - 1) \int_0^{\frac{m}{\rho}} z\varphi(z) dz + \int_{\frac{m}{\rho}}^m (m - z)\varphi(z) dz \right]$$

Tale differenza  $d(m, \rho)$  definisce compiutamente in termini compatti il problema in esame. Infatti rispetto al segno di  $\rho$  si ha:

$$(5.16) \quad d(m, \rho) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0 \implies \bar{\pi}(m) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \pi(m) \implies \rho \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 1$$

In sostanza la (5.16) sta a significare che:

a)- se il potere di acquisto della moneta è diminuito ( $\rho > 1$ ) tra le due epoche di riferimento  $t_0$  e  $t_1$ , il contraente pagando il premio costante  $\pi(m)$  in  $t_0$  paga meno del dovuto in  $t_1$ , risultando  $\bar{\pi}(m) > \pi(m)$ , e di conseguenza l'Impresa consegue una perdita di congiuntura;

b)- se il potere di acquisto viceversa è aumentato ( $\rho < 1$ ), verificandosi  $\bar{\pi}(m) < \pi(m)$ , il contraente si troverà ad esborsare una somma superiore a quella dovuta, con un utile di congiuntura da parte della Compagnia.

### 6. Un' applicazione

Si consideri un portafoglio costituito da  $N = 2.000$  contratti, con  $v = 160$  polizze sinistrate per un totale di  $n = 200$  sinistri ripartiti secondo la seguente distribuzione per importo del danno (in migliaia di lire):

Classi di danno	N. dei sinistri	Costo sinistri
0 → 10.000	120	960.000
10.000 → 20.000	50	650.000
20.000 → 30.000	15	405.000
30.000 → 40.000	10	320.000
40.000 → 50.000	4	168.000
> 50.000	1	55.000
Totale	$n = 200$	$A = 2.558.000$

Tenendo presente il danno totale  $A$ , il premio puro in assenza di limitazione superiore risulta:

$$(6.1) \quad \pi = \frac{A}{N} = \frac{v}{N} \cdot \frac{n}{v} \cdot \frac{A}{n} = 0,08 \cdot 1,25 \cdot 12.790$$

Qualora invece la Compagnia imponga un massimale  $m$  alla copertura, il risarcimento totale è dato da

$$(6.2) \quad A(m) = \int_0^m z\varphi(z) dz + m \int_m^\infty \varphi(z) dz = s(m) + mn(m)$$

in cui:

$s(m)$  = costo sinistri di importo inferiore al massimale;

$n(m)$  = numero dei sinistri il cui importo eccede il massimale.

Nel prospetto sottoindicato vengono riportati i valori sia del risarcimento totale  $A(m)$  che di quello medio  $a(m) = \frac{A(m)}{n}$  al variare del livello  $m$ :

Livello del massimale	Risarcimento totale	Risarcimento medio
10.000	1.760.000	8.800
20.000	2.210.000	11.050
30.000	2.465.000	12.325
40.000	2.535.000	12.675
50.000	2.553.000	12.765
illimitato	2.558.000	12.790

Nota il coefficiente sinistri  $\frac{n}{N} = 0.1$ , e' immediato il calcolo del premio puro. Infatti si ottiene:

$m$	$\pi(m)$
10.000	880
20.000	1105
30.000	1233
40.000	1268
50.000	1277
illimitato	1279

essendo

$$(6.3) \quad \pi(m) = \frac{n}{N} a(m) = \frac{n}{N} \frac{A(m)}{n} = \frac{A(m)}{N}$$

ed inoltre sussiste la relazione asintotica

$$(6.4) \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \pi(m) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{n}{N} a(m) = \frac{n}{N} \lim_{m \rightarrow +\infty} a(m) = \frac{n}{N} a = \pi$$



Capitolo Terzo

LA FUNZIONE DI UTILITA' NEL RAPPORTO ASSICURATIVO

1. Considerazioni generali

Intendiamo per utilita' u(.) una funzione reale di variabile reale applicata ad un importo monetario x:

u : x in R -> u\_x in R

Nel seguito ci riferiremo ad una funzione di utilita' u(x) misurabile secondo V. Neumann e Mongerstern, cioe' l'utilita' di tipo bernoulliano. Tale funzione consente di quantificare le conseguenze di scelte possibili a differenza di una definizione di utilita' ordinale la quale fornisce soltanto una risposta alla graduatoria delle preferenze di un soggetto decisore. Intendendo pertanto con u(x) il beneficio economico derivante dalla disponibilita' di un importo x, nel prosieguo volendo vedere quale ruolo essa ha nei rapporti assicurativi esamineremo in primo luogo la sua struttura generale, ed in secondo luogo il significato operativo riferito al comportamento dell'assicurato e della Compagnia di Assicurazioni.

Supponiamo per il momento che (x) sia una variabile deterministica, la quale assume di conseguenza soltanto valori certi. La funzione u(x) e' tale che consente di scegliere tra due (o piu') prospetti, il cui risultato e' completamente prevedibile, in base ad una regola di decisione coerente con il comportamento razionale. Se indichiamo con x\_A e x\_B i ricavi derivanti dall'adozione rispettivamente di A e B, allora:

(1.1) A p B <=> u(x\_A) > u(x\_B)
A i B <=> u(x\_A) = u(x\_B)
A < p B <=> u(x\_A) < u(x\_B)

in altri termini sceglieremo quel prospetto cui compete una utilita' maggiore. In pratica ciascun decisore economico valuta il proprio schema di preferenze secondo diverse tipologie analitiche della funzione di utilita'. E precisamente:

- a)- u(x) convessa: u'(x) > 0, u''(x) < 0
ovvero con utilita' marginale decrescente, tipica di una situazione di avversione al rischio;
b)- u(x) concava: u'(x) > 0, u''(x) > 0
ovvero con utilita' marginale crescente, tipica di una situazione di propensione al rischio;
c)- u(x) lineare: u'(x) = cost. > 0, u''(x) = 0
ovvero con utilita' marginale costante, tipica di una situazione di neutralita' al rischio.

Esempi di funzioni appartenenti alla classe a) sono:

u(x) = c log x ; u(x) = sqrt(x)
u(x) = 1/r [1 - e^-rx] ; u(x) = x - 1/2 rx^2

Appartengono al secondo gruppo funzioni del tipo:

u(x) = e^rx ; u(x) = ax^2 - x (a > 0)

Ed infine al terzo gruppo quelle che possono essere espresse da una forma lineare: u(x) = ax (a > 0).

Al fine di fornire una misura della disponibilita' al rischio puo' essere preso in considerazione il seguente coefficiente assoluto di avversione al rischio:

(1.2) rho\_a def = - u''(x) / u'(x)

o in termini relativi:

(1.3) rho\_r def = -x u''(x) / u'(x)

Tale coefficiente rho\_a assume qualsiasi valore reale

$-\infty < \rho_a < +\infty$  ed in particolare si ha:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \rho_a > 0 &\longrightarrow u(x) \text{ e' convessa} \\ \rho_a < 0 &\longrightarrow \text{ " " concava} \\ \rho_a = 0 &\longrightarrow \text{ " " lineare} \end{aligned}$$

Come avremo modo di notare funzioni di utilita' di tipo esponenziale negativo godono della proprieta' che il coefficiente assoluto di avversione al rischio  $\rho_a$  e' costante ( $>0$ ). Ed ancora sussiste la proprieta' che per  $\rho_a \rightarrow 0$  la funzione di utilita' tende ad assumere la struttura lineare. Infatti posto

$$u(x) = \frac{1}{r} [1 - e^{-rx}]$$

si ottiene  $\rho_a = r$ . Quindi, sviluppando in serie di Taylor il termine  $e^{-rx}$ :

$$e^{-rx} = 1 - rx + \frac{(rx)^2}{2!} - \frac{(rx)^3}{6} + \dots$$

si ricava

$$(1.5) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{r} (1 - e^{-rx}) \right] = \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{r} \left( 1 - 1 + rx - \frac{(rx)^2}{2!} \right) \right] = x$$

Si noti che la funzione di utilita' quadratica  $u(x) = x - \frac{1}{2} rx^2$  e' una approssimazione di quella esponenziale, potendo scrivere:

$$(1.6) \quad u(x) = \frac{1}{r} [1 - e^{-rx}] = \frac{1}{r} \left[ 1 - 1 + rx - \frac{(rx)^2}{2!} \right] = \frac{1}{r} \left[ rx - \frac{(rx)^2}{2} \right] = x - \frac{1}{2} rx^2$$

## 2. L'utilita' attesa

Nell'ipotesi che il decisore si trovi a dover effettuare una scelta tra due (o piu') prospetti aleatori  $\tilde{A}$  e  $\tilde{B}$ , i cui importi siano variabili casuali con distribuzione  $\Phi_A(x)$  e  $\Phi_B(x)$ , la funzione di utilita'  $u(\cdot)$  diviene a sua volta una funzione di

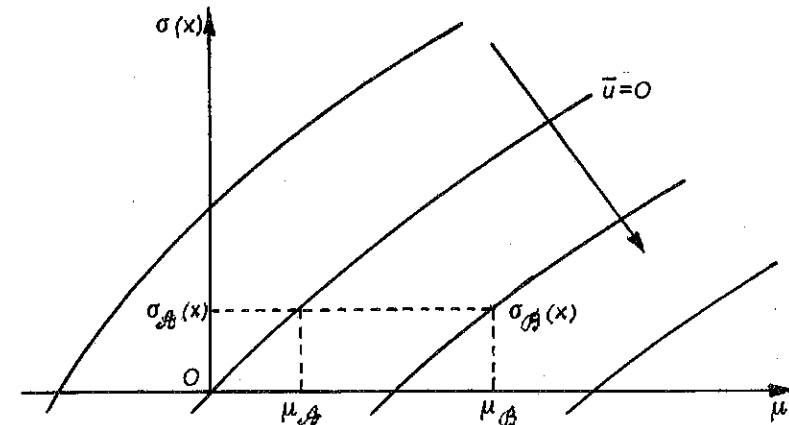
variabile casuale. La regola di decisione in questo caso si basa sulla scelta del prospetto con utilita' attesa piu' elevata. In altri termini, indicando con  $\bar{u} = E[u(x)]$  l'utilita' attesa, avremo che:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \tilde{A} \succ \tilde{B} &\iff E_{\tilde{A}}[u(x)] > E_{\tilde{B}}[u(x)] \\ \tilde{A} \sim \tilde{B} &\iff E_{\tilde{A}}[u(x)] = E_{\tilde{B}}[u(x)] \\ \tilde{A} \prec \tilde{B} &\iff E_{\tilde{A}}[u(x)] < E_{\tilde{B}}[u(x)] \end{aligned}$$

E' interessante notare che qualora la funzione di utilita' abbia una struttura in condizioni di avversione al rischio del tipo quadratico  $u(x) = x - ax^2$ , con  $a = \frac{1}{2} r$  come dall'approssimazione con l'esponenziale negativa, si ottiene immediatamente:

$$(2.2) \quad E[u(x)] = E[x - ax^2] = E(x) - aE(x^2) = E(x) - a[\sigma^2(x) + [E(x)]^2]$$

Tale relazione pone in evidenza che in questo caso l'utilita' attesa risulta essere definita in corrispondenza di due parametri di valutazione: il valor medio  $E(x)$  e la varianza  $\sigma^2(x)$  del prospetto aleatorio considerato. Particolare interesse riveste l'interpretazione geometrica di  $E[u(x)]$ . Posto  $E(x) = \mu$  e scrivendo  $\bar{u} = k = \mu - a[\sigma^2(x) + \mu^2]$  la condizione  $E[u(x)] = k = \text{costante}$  definisce un insieme di funzioni di indifferenza o di isoutilita' in corrispondenza delle possibili coppie di valori  $(\mu, \sigma(x))$  associati ad un prospetto aleatorio.



Ora, dal momento che:

$$\frac{\partial E[u(x)]}{\partial \mu} = 1 - 2a\mu > 0$$

in quanto la funzione di utilita'  $u(x) = x - ax^2$  ammette *valore critico*  $x_c = \frac{1}{2a}$  e solamente per valori  $x \leq x_c$  va considerata; ed inoltre poiche'

$$\frac{\partial E[u(x)]}{\partial \sigma} = -2a\sigma < 0$$

si evince che la famiglia di curve  $\{\bar{u}=k\}$  si dispone per valori crescenti dell'utilita' attesa secondo il senso indicato dalla freccia. Pertanto il criterio di preferenza enunciato induce a confrontare per ogni prospetto aleatorio le possibili combinazioni  $(\mu, \sigma(x))$ . Infatti siano dati:

$$\tilde{A} = (\mu_A, \sigma_A(x)) \quad ; \quad \tilde{B} = (\mu_B, \sigma_B(x))$$

Il prospetto  $\tilde{B}$  viene preferito in quanto giace su una curva di indifferenza con utilita' attesa maggiore di  $\tilde{A}$ , e valgono di conseguenza i criteri di *dominazione* noti nella *Teoria della selezione del portafoglio*. Vale a dire:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} &\text{se } \sigma_A(x) = \sigma_B(x) \text{ e } \mu_A < \mu_B \iff \tilde{B} p \tilde{A} \\ &\text{se } \sigma_A(x) < \sigma_B(x) \text{ e } \mu_A = \mu_B \iff \tilde{A} p \tilde{B} \end{aligned}$$

L'intersezione  $\nu$  della curva di indifferenza con l'asse delle ascisse consente infine un immediato confronto con un qualsiasi altro prospetto con medesima utilita' attesa e varianza nulla.

### 3. Il rapporto assicurativo

Al fine di evidenziare alcune proprieta' caratteristiche della funzione di utilita', consideriamo un soggetto economico il quale si trovi di fronte alla scelta tra un prospetto alea-

torio  $\tilde{A}$  ed uno certo  $B$  cosi' caratterizzati:

$$(3.1) \quad \tilde{A} = \begin{cases} x_1 & \text{prob. } \alpha \\ x_2 & \text{prob. } 1-\alpha \end{cases} \quad B = \begin{cases} x_0 \end{cases}$$

E' la tipica situazione di un individuo al quale viene offerto un importo  $x_0$  contro una scommessa aleatoria  $\tilde{A}$ ; nel riferimento assicurativo si puo' intendere la decisione tra l'esborsare  $x_0$  per cautelarsi da un danno eventuale  $\tilde{A}$  oppure l'accettare il rischio. Al prospetto aleatorio  $\tilde{A}$  e' associata l'utilita' attesa

$$(3.2) \quad E_{\tilde{A}}[u(x)] = \bar{u} = \alpha u(x_1) + (1-\alpha)u(x_2)$$

mentre per  $B$ :  $u(x_0)$ .

Indicando con  $\bar{x} = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$  il valore attuariale del prospetto  $\tilde{A}$  e quindi con l'identita'  $x_0 = \bar{x}$  il premio puro in base al principio di equita', il problema di scelta si identifica pertanto tra il pagamento del premio  $\bar{x}$  e l'affrontare il rischio. Vale, per quanto detto, la seguente regola di decisione:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \tilde{A} p B &\iff \bar{u} > u(x_0) \\ \tilde{A} i B &\iff \bar{u} = u(x_0) \\ \tilde{A} \not p B &\iff \bar{u} < u(x_0) \end{aligned}$$

La relazione

$$(3.4) \quad \tilde{A} p B \iff \bar{u} > u(\bar{x})$$

per  $x_0 = \bar{x}$ , definisce una situazione di propensione al rischio; se viceversa  $B p \tilde{A} \iff \bar{u} < u(\bar{x})$  il decisore preferisce il prospetto certo a quello aleatorio; se infine  $\tilde{A} i B \iff \bar{u} = u(\bar{x})$  vi e' indifferenza tra i prospetti, situazione di neutralita' nei confronti del rischio. Qualora sussista la disuguaglianza  $\bar{u} > u(\bar{x})$ , la differenza  $\bar{u} - u(\bar{x})$  assume il significato di *utilita' addizionale* attribuita alla situazione rischiosa.

#### 4. Certo equivalente e premio di rischio

Per *certo equivalente* si intende quella somma da ricevere (o pagare) per certa per la quale il decisore è indifferente tra il possedere (esborsare) tale somma e l'importo aleatorio di un prospetto  $\tilde{A}$ . Ricordando che la relazione di indifferenza è  $u(x_0) = \bar{u}$ , se indichiamo con  $\nu$  il certo equivalente, esso è tale da soddisfare la seguente uguaglianza:

$$(4.1) \quad \nu : u(\nu) = \bar{u} = E[u(x)]$$

Dalla (3.3) si ottiene:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \tilde{A} \succ B &\iff \bar{u} > u(\bar{x}) \iff \nu > \bar{x} \\ \tilde{A} \sim B &\iff \bar{u} = u(\bar{x}) \iff \nu = \bar{x} \\ \tilde{A} \prec B &\iff \bar{u} < u(\bar{x}) \iff \nu < \bar{x} \end{aligned}$$

in condizioni rispettivamente di propensione, neutralità ed avversione al rischio.

Si definisce inoltre *premio di rischio*  $\pi_\rho$  la differenza:

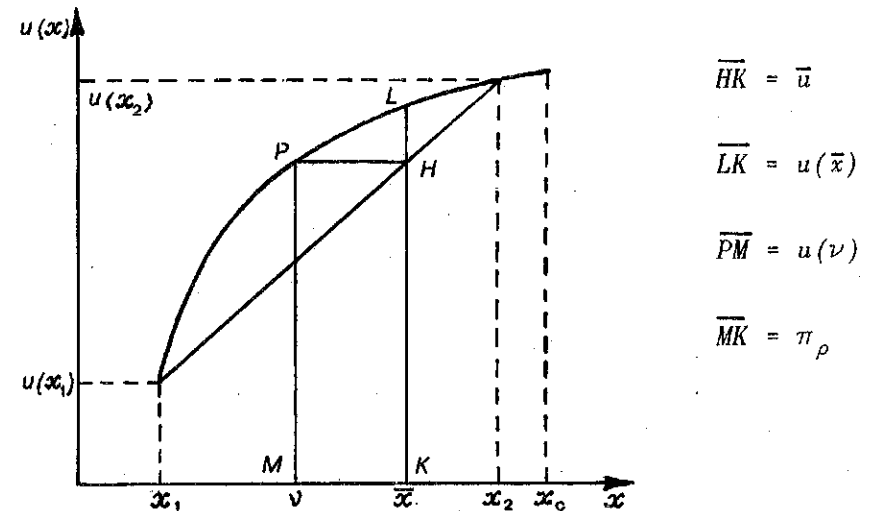
$$(4.3) \quad \pi_\rho : \begin{cases} = \bar{x} - \nu & \text{se } \nu < \bar{x} \\ = \nu - \bar{x} & \text{se } \nu > \bar{x} \\ = 0 & \text{se } \nu = \bar{x} \end{cases}$$

In sostanza le relazioni (4.2) e (4.3) godono della seguente interpretazione. In condizione di avversione al rischio, quella più comune, il certo equivalente è il massimo prezzo che il decisore (nel nostro caso l'assicurato) è disposto a pagare per evitare la situazione rischiosa; e di conseguenza  $\pi_\rho$  è il massimo prezzo addizionale, differenza tra il premio puro  $\bar{x}$  ed il certo equivalente  $\nu$ , che sarebbe disposto ad esborsare per evitare la situazione rischiosa  $\tilde{A}$ . Supponiamo ad esempio che una Compagnia richieda per la copertura assicurativa l'importo  $x'_0 > \bar{x}$  (\*); in questo caso il decisore sceglie ovviamente il pro-

(\*) Va sottolineato che trattandosi di esborsi certi o aleatori da parte del contraente, occorre considerarli come se preceduti da segno negativo.

spetto certo B. Richiedendo invece un importo  $\nu < x'_0 < \bar{x}$ , il decisore sceglie ancora B ed è disposto a pagare più dell'equità attuariale in misura della differenza  $\bar{x} - x'_0$  (sacrificio in termini monetari). Se  $x'_0 < \nu$  il decisore sceglie il prospetto  $\tilde{A}$ , non si assicura ed affronta la situazione rischiosa, in quanto stima eccessivamente oneroso il premio della copertura assicurativa (si tenga presente che è disposto a pagare al massimo  $\nu$ ). Da quanto esposto è evidente la prassi di un caricamento di sicurezza sui premi puri e l'accettazione da parte degli assicurati di esborsare importi eccedenti l'importo calcolato in base al principio di equità attuariale  $x_0 = \bar{x}$ .

Da un punto di vista geometrico, nel riferimento cartesiano  $[x, u(x)]$  indichiamo con  $(x)$  i possibili esborsi aleatori ammettendo da parte del contraente una disponibilità iniziale  $(x_c)$  convergente a zero per pagamenti crescenti in valore assoluto. Dall'equazione della retta per i punti  $(x_1, u(x_1))$  e  $(x_2, u(x_2))$  risulta:



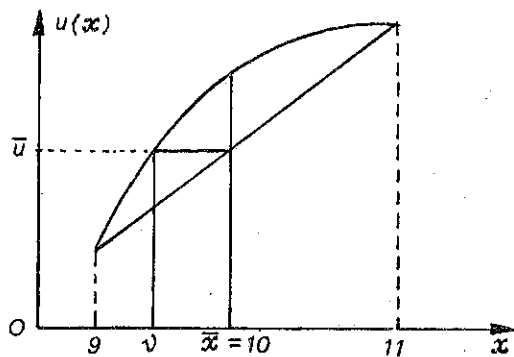
$$(4.4) \quad \begin{aligned} \bar{u} &= E[u(x)] = u(x_1) + [u(x_2) - u(x_1)] \cdot \frac{\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 - x_1}{x_2 - x_1} \\ &= \alpha u(x_1) + (1-\alpha)u(x_2). \end{aligned}$$

5. Alcuni esempi

Al fine di chiarire i concetti esposti vediamo in particolare, con alcuni esempi, il significato attribuito al *valore critico di preferenza* ovvero al certo equivalente. Si e' detto che per funzioni di utilita' convesse tale valore critico  $\nu$  rappresenta una soglia di preferenza in quanto e' inteso come quel valore certo che consente di preferire il prospetto  $B$  al prospetto  $\tilde{A}$ . Un decisore avverso al rischio preferisce di solito un importo certo ad uno aleatorio con uguale valor medio. Naturalmente agli importi ( $x$ ) possiamo attribuire il significato di *cash flow* nel senso di entrate o uscite, e se ( $x$ ) rappresentano dei ricavi allora  $\nu$  ha per l'appunto il significato di *importo minimo* per il quale il decisore e' disposto a rifiutare il prospetto  $\tilde{A}$ . Vediamo un esempio. Ad un soggetto viene proposta la scelta tra questi due prospetti:

$$\tilde{A} = \begin{cases} x_1 = 9 & \text{prob. } 0.5 \\ x_2 = 11 & \text{prob. } 0.5 \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} x_0 = 10 \end{cases}$$



Se gli e' offerto  $x'_0 = \bar{x}$ , risultando  $u(x'_0) > E[u(x)]$ , accetta  $B$ . Anche ad una somma inferiore, tale che  $\nu < x'_0 < \bar{x}$ , ci troviamo nella medesima condizione. Qualora l'importo sia uguale a  $\nu$  la situazione e' di indifferenza; per valori  $x'_0 < \nu$  il decisore accetta  $\tilde{A}$  in quanto  $u(x'_0) < E[u(x)]$ , e quindi  $\nu$  assume il significato di minimo valore critico al di sotto del quale e' propenso a correre l'alea.

In maniera del tutto analoga qualora  $\tilde{A}$  rappresenti una perdita potenziale e  $B$  un esborso certo si e' detto che a  $\nu$  viene attribuito il significato di prezzo massimo che il decisore

e' disposto a pagare per non affrontare la situazione rischiosa  $\tilde{A}$ , o in termini attuariali il premio massimo di copertura che e' disposto ad esborsare alla Compagnia di Assicurazioni. A titolo di esempio si supponga che per un contratto contro il furto il rischio sia quantificato dalla seguente variabile casuale:

$$\tilde{A} = \begin{cases} x_1 = -7000 & \text{prob. } \alpha = 0.2 \\ x_2 = 0 & \text{prob. } 1-\alpha = 0.8 \end{cases}$$

Il valore attuariale risulta  $\bar{x} = -1400$ . In caso di neutralita' nei confronti del rischio il contraente e' disposto pertanto a pagare il premio puro  $P = -1400$ . E' chiaro che per qualsiasi  $\hat{P} > P$  piu' vantaggiosa risulta parallelamente la copertura assicurativa. In caso di avversione al rischio si supponga che sia disposto ad esborsare un importo limite  $\nu = \hat{P} = -2600$ ; tale somma e' il massimo che intende pagare per la copertura, e l'importo addizionale di  $-1200$  e' pertanto il premio di rischio  $\pi_p$  o sacrificio economico che si intende sopportare per evitare l'alea.

In termini generali sia  $C$  il capitale iniziale del contraente,  $P$  il premio,  $\tilde{h}$  la perdita aleatoria ( $h, \alpha; 0, 1-\alpha$ ). Lo schema decisionale puo' essere cosi' formulato:

	evento furto si verifica	evento furto non si verifica
accettare la copertura	$C - P$	$C - P$
non accettare la copertura	$C - h$	$C$

I prospetti a confronto dunque sono:

$$(5.1) \quad \tilde{A} = \begin{cases} C - h & \text{prob. } \alpha \\ C & \text{prob. } 1-\alpha \end{cases} \quad B = \begin{cases} C - P \end{cases}$$

In caso di indifferenza si ha:

$$(5.2) \quad E[u(\tilde{A})] = u(C - P)$$

e per  $u(x)=x$  la (5.2) diventa:

$$(5.3) \quad \alpha(C-h) + (1-\alpha)C = C - P$$

da cui  $P = \alpha h$  (valore attuariale del prospetto aleatorio).

In caso invece di avversione al rischio risulta:

$$(5.4) \quad E[u(\tilde{A})] = E[u(C-h)] < u(C-P)$$

Possiamo pertanto dire che il premio massimo che il contraente e' disposto a pagare per cautelarsi da un danno eventuale  $\tilde{x}$  e' deducibile dalla seguente relazione:

$$(5.5) \quad E[u(C-x)] = u(C-P)$$

laddove  $C-P$  (e  $P$ ) ha dunque il significato di certo equivalente. Nell'ipotesi  $C=0$  ed adottando una funzione di utilita' di tipo quadratico  $u(x) = x - \frac{1}{2} r x^2$  con valore critico  $x_c = \frac{1}{r}$ , si ottiene per la (5.5):

$$(5.6) \quad u(P) = E[u(x)] \implies P = \frac{1 - \sqrt{(1-rE(x))^2 + r^2 \sigma^2(x)}}{r}$$

Come si puo' notare tale premio  $P$  e' maggiore di quello calcolato in base al principio di equita' attuariale  $P=E(x)$ . Le due misure coincidono se e solo se  $r=0$ . Infatti dalla uguaglianza

$$(5.7) \quad \frac{1 - \sqrt{(1-rE(x))^2 + r^2 \sigma^2(x)}}{r} = E(x)$$

si ricava sviluppando  $r^2 \sigma^2(x) = 0$ , che, essendo  $\sigma^2(x) \neq 0$ , e' vera per  $r=0$ , ovvero la funzione di utilita' e' di tipo lineare.

Si consideri come applicazione la seguente offerta:

$$\tilde{A} = \begin{cases} x_1 = 1 & \alpha = 0.8 \\ x_2 = 0 & 1-\alpha = 0.2 \end{cases} \quad B = \begin{cases} x_0 = 0.6 \end{cases} \quad (r=0.5)$$

Per la (5.6) il decisore e' disposto a rifiutare l'alea per l'importo limite  $P=0,736$ ; per valori inferiori accetta il prospetto  $\tilde{A}$ .

Se, viceversa, consideriamo la seguente alternativa:

$$(5.8) \quad \tilde{B} = \begin{cases} x_1 = -1 & \alpha = 0.8 \\ x_2 = 0 & 1-\alpha = 0.2 \end{cases} \quad B = \begin{cases} x_0 = -0.87 \end{cases} \quad (r=0.5)$$

allora risulta  $P = -0,82$  quale massimo premio che si e' disposti a pagare, e di conseguenza la copertura assicurativa viene respinta.

### 6. La distribuzione del rischio

Qualora si consideri la funzione di utilita' esponenziale negativa

$$(6.1) \quad u(x) = \frac{1}{r} [1 - e^{-rx}]$$

con la variabile casuale  $\tilde{x}$  distribuita secondo un'assegnata funzione di ripartizione  $\Phi(x)$ , in base alla definizione di certo equivalente

$$(6.2) \quad P : u(P) = E[u(x)]$$

si ricava:

$$(6.3) \quad P = -\frac{1}{r} \log_e E[e^{-rx}]$$

Formuliamo ora alcune ipotesi sulla distribuzione  $\Phi(x)$ . Se  $\tilde{x}$  e' una variabile casuale Normale con media  $\mu$  e varianza  $\sigma^2$  ( $\tilde{x} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ), consideriamo una funzione di utilita' del tipo

$$u(x) = 1 - e^{-rx}$$

con coefficiente assoluto di avversione al rischio  $\rho_a = r$ . In base alla (6.2) si ottiene:

$$\begin{aligned}
 E[u(x)] &\stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \\
 (6.4) \quad &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 - rx} dx
 \end{aligned}$$

Passando alla variabile standardizzata  $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ ,

$$(6.5) \quad E[u(x)] = 1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma e^{-\frac{1}{2}z^2 - r\sigma z - r\mu} dz$$

ed aggiungendo e sottraendo  $r^2\sigma^2/2$  all'esponente della funzione integranda, si ricava quindi:

$$\begin{aligned}
 E[u(x)] &= 1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma e^{-\frac{1}{2}(z+r\sigma)^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}(2r\mu - r^2\sigma^2)} dz = \\
 (6.6) \quad &= 1 - e^{-\frac{1}{2}(2r\mu - r^2\sigma^2)} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x+r\sigma^2-\mu}{\sigma}\right)^2} dx
 \end{aligned}$$

Poiche'  $r\sigma^2$  e' un termine costante, consideriamo la nuova variabile  $\hat{x} = x + r\sigma^2$  e sostituendo:

$$(6.7) \quad E[u(x)] = 1 - e^{-\frac{1}{2}(2r\mu - r^2\sigma^2)} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{x}-\mu}{\sigma}\right)^2} d\hat{x}$$

E quindi in definitiva:

$$(6.8) \quad E[u(x)] = 1 - e^{-\frac{1}{2}(2r\mu - r^2\sigma^2)}$$

Dalla (6.2) inoltre:

$$(6.9) \quad 1 - e^{-rP} = 1 - e^{-\frac{1}{2}(2r\mu - r^2\sigma^2)}$$

e pertanto

$$(6.10) \quad P = \mu - \frac{1}{2} r\sigma^2$$

Anche in questo caso si verifica immediatamente che se  $r=0$  allora  $P = \mu$ .

Fermo restando la (6.1), sia  $\tilde{x}$  distribuita secondo una variabile casuale Binomiale. Dalla (6.3) si ha:

$$\begin{aligned}
 P &= -\frac{1}{r} \log_e \left[ \sum_0^n p^x e^{-rx} \frac{n!}{x!(n-x)!} (1-p)^{n-x} \right] = \\
 (6.11) \quad &= -\frac{1}{r} \log_e \left[ 1 - p + pe^{-r} \right]^n = -\frac{n}{r} \log_e [1 - p + pe^{-r}]
 \end{aligned}$$

Sia ora  $\tilde{x}$  distribuita secondo una variabile casuale di Poisson. Si ottiene in questo caso:

$$\begin{aligned}
 P &= -\frac{1}{r} \log_e \left[ \sum_0^\infty p^x e^{-rx} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \right] = \\
 (6.12) \quad &= -\frac{1}{r} \log_e \left[ e^{-\lambda} \lambda e^{-r} \sum_0^\infty \frac{(\lambda e^{-r})^x e^{-\lambda e^{-r}}}{x!} \right] = \\
 &= -\frac{1}{r} \log_e \left[ e^{-\lambda(1-e^{-r})} \right] = \frac{\lambda}{r} (1 - e^{-r})
 \end{aligned}$$

Nel caso infine che  $\tilde{x}$  sia distribuita secondo una variabile di tipo Gamma, abbiamo:

$$\begin{aligned}
 P &= -\frac{1}{r} \log_e \int_0^\infty e^{-rx} \frac{e^{-ax} a^b x^{b-1}}{(b-1)!} dx = \\
 (6.13) \quad &= -\frac{1}{r} \log_e \left\{ \frac{a^b}{(a+r)^b} \int_0^\infty \frac{(a+r)^b x^{b-1} e^{-(a+r)x}}{(b-1)!} dx \right\} = \\
 &= \frac{b}{r} \log_e \left( 1 + \frac{r}{a} \right)
 \end{aligned}$$

### 7. L'utilità dell'Impresa

Per quanto concerne la linea di condotta di una Compagnia di Assicurazioni la quale si trovi nella condizione di dover stimare il premio  $P$  necessario a garantire la copertura di un rischio, possono essere svolte alcune considerazioni tenendo presente una prefissata struttura di utilità. Si supponga che l'Impresa stessa operi in condizione di avversione al rischio e si ponga quindi con  $u(x) = x - \frac{1}{2}rx^2$  la relativa funzione di utilità. Sia inoltre  $W$  il fondo di garanzia disponibile. Nei confronti di un evento dannoso, ad esempio

$$(7.1) \quad \tilde{x} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x_1 & \text{prob. } \alpha \\ x_2 = 0 & \text{prob. } 1-\alpha \end{cases}$$

lo schema decisionale diventa:

	evento si verifica	evento non si verifica
offrire la copertura } $d_1$	$W + P - x_1$	$W + P$
non offrire la copertura } $d_2$	$W$	$W$

In questo schema sono riportate le possibili situazioni patrimoniali in corrispondenza delle decisioni e degli stati di natura: situazioni patrimoniali ovviamente a scadenza, subordinatamente alla decisione presa ed al verificarsi o meno del sinistro. La regola di decisione fondata sull'utilità attesa di ciascuna alternativa diviene pertanto:

$$(7.2) \quad \begin{aligned} d_1 \text{ p } d_2 &\iff E[u(W+P-\tilde{x})] > u(W) \\ d_1 \text{ i } d_2 &\iff E[u(W+P-\tilde{x})] = u(W) \\ d_1 \text{ p } d_2 &\iff E[u(W+P-\tilde{x})] < u(W) \end{aligned}$$

In questo caso il premio  $P$  quale fattore discriminante tra le prospettive può essere desunto dalla relazione di equivalenza:

$$(7.3) \quad u(W) = E[u(W+P-\tilde{x})]$$

vale a dire quell'importo per il quale l'Impresa è indifferente tra l'accettabilità o il rifiuto del rischio. Tale premio naturalmente è il prezzo minimo da richiedere per l'assunzione della copertura, per la quale dovrà sempre realizzarsi in concreto la disuguaglianza

$$(7.4) \quad u(W) < E[u(W+P-\tilde{x})]$$

Se, in particolare, la Compagnia valutasse la situazione rischiosa mediante una funzione di utilità di tipo lineare, la relazione di indifferenza (7.3) comporterebbe  $P = E(x)$ , ovvero un premio calcolato in base al principio del valor medio; e naturalmente la soluzione con una funzione di utilità quadratica, o comunque con qualsiasi altra funzione convessa, risulta sempre superiore al valore attuariale. Pertanto dalla (7.3) si ricava:

$$(7.5) \quad P = \frac{(1+rE(x)-rW) - \sqrt{(1-rW)^2 - r^2\sigma^2(x)}}{r}$$

In tal modo  $P$  è completamente determinato; tuttavia, affinché il discriminante della radice risulti positivo, occorre tener conto del vincolo  $W + \sigma(x) < \frac{1}{r}$  (si noti tra l'altro che delle due radici dell'equazione consideriamo la minore per la presenza del valore critico  $x_c = \frac{1}{r}$ ). Come applicazione, dato il rischio:

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_1 = 1 & \alpha = 0.8 \\ x_2 = 0 & 1-\alpha = 0.2 \end{cases} \quad r = 0.5 \quad W = 0$$



risulta  $P = 0,84$ . Se avessimo considerato invece una funzione di utilita' esponenziale negativa avremmo avuto, in luogo della (7.5):

$$(7.6) \quad P = \frac{1}{r} \log_e E[e^{rx}]$$

Con i dati dell'esempio precedente si ottiene  $P = 0,83$ . E' opportuno notare che il premio ora e' indipendente sia dal fondo di garanzia  $W$  sia dalla variabilita' del rischio.

### 8. Le decisioni dell'assicurato

Supponiamo che un individuo, in condizioni di avversione al rischio, abbia una struttura di utilita' del tipo quadratico  $u(x) = x - \frac{1}{2}rx^2$  e consideri l'eventualita' di assicurarsi contro un evento dannoso rappresentato dalla seguente variabile casuale:

$$\tilde{z} = \begin{cases} z_1 = 7 & \alpha = 0.8 \\ z_2 = 0 & 1-\alpha = 0.2 \end{cases} \quad (r=0.1)$$

Tale individuo abbia una somma iniziale  $C = 8$ , ed una Compagnia gli offra la copertura della perdita eventuale  $\tilde{z}$  in cambio di un premio  $P$ . Ci chiediamo quale sia la decisione migliore dell'individuo tra l'accettare o non accettare il rapporto assicurativo, al variare dell'importo  $P$ . La situazione puo' essere schematizzata nel prospetto seguente, laddove vengono riportati i valori delle conseguenze o capitale finale disponibile:

	evento si verifica	evento non si verifica
non accettare la copertura } $d_1$	$C - z_1$	$C$
accettare la copertura } $d_2$	$C - P$	$C - P$

In base al principio dell'utilita' attesa vale il seguente schema di preferenza (si osservi che la decisione  $d_2$ , se presa, comporta una conseguenza certa), dove indichiamo con  $(x)$  le disponibilita' finali  $C - \tilde{z}$  oppure  $C - P$ :

$$(8.1) \quad \begin{aligned} d_1 \succ d_2 &\iff E[u(C - \tilde{z})] > u(C - P) \\ d_1 \sim d_2 &\iff E[u(C - \tilde{z})] = u(C - P) \\ d_1 \prec d_2 &\iff E[u(C - \tilde{z})] < u(C - P) \end{aligned}$$

Applicando tale regola di decisione, si ha innanzi tutto:

$$(8.2) \quad \begin{aligned} d_1 \sim E[u(x)] &= E[u(C - \tilde{z})] = E\left[C - z - \frac{1}{2}r(C - z)^2\right] = \\ &= C - E(z) - \frac{1}{2}rC^2 - \frac{1}{2}r[\sigma^2(z) + E^2(z)] + rE(z)C \\ d_2 \sim C - P &- \frac{1}{2}r(C - P)^2 \end{aligned}$$

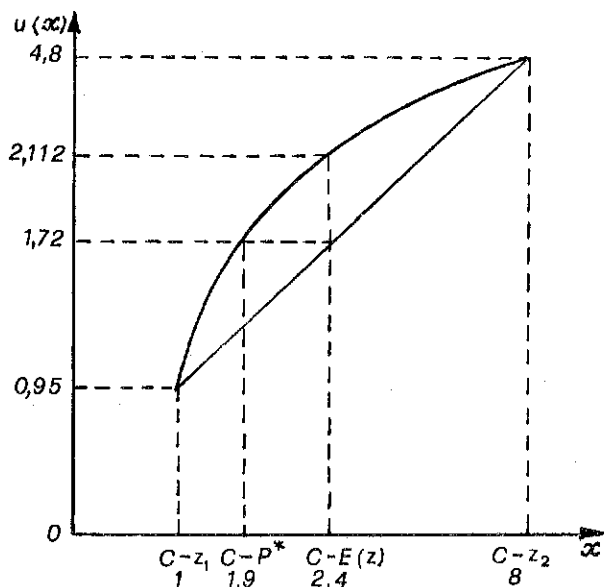
Il valore  $P^*$  ottenuto mediante la relazione di indifferenza

$$d_1 \sim d_2 \iff E[u(C - \tilde{z})] = u(C - P^*)$$

rappresenta il livello di premio discriminante, determinando il certo equivalente  $C - P^*$  a scadenza. Dalla (8.2) pertanto si ricava:

$$(8.3) \quad P^* = \frac{[rC - 1] + \sqrt{[rC - 1 - rE(z)]^2 + r^2\sigma^2(z)}}{r}$$

dove prendiamo il segno positivo della radice in quanto il fattore  $rC - 1$  e' negativo per soddisfare alla limitazione  $x_c = \frac{1}{r}$ . In base ai dati forniti otteniamo:



$$u(x) = x - 0,05 x^2$$

$$u(C-z_1) = u(1) = 0,95$$

$$u(C-z_2) = u(8) = 4,8$$

$$E(z) = 5,6$$

$$\sigma^2(z) = 7,84$$

$$\bar{u} = E[u(x)] = 1,72$$

$$u(C-E(z)) = 2,112$$

$$P^* = 6,1; C-P^* = 1,9$$

Quindi il valore discriminante  $P^*$  può essere considerato come quell'importo massimo che il decisore è disposto a pagare per trasferire il rischio alla Compagnia di Assicurazioni. Ovvero la scelta tra le due alternative risulta così formulata:

$$(8.4) \quad \begin{aligned} d_1 \text{ p } d_2 &\iff E[u(x)] > u(C-P) && \text{per } P > P^* \\ d_1 \text{ i } d_2 &\iff E[u(x)] = u(C-P) && \text{per } P = P^* \\ d_1 \text{ n } d_2 &\iff E[u(x)] < u(C-P) && \text{per } P < P^* \end{aligned}$$

Come si nota  $P^*=6,1 > E(z)=5,6$ , cioè il decisore è disposto a pagare fino a 6,1; somma maggiore del danno medio  $E(z)$  e quindi del premio calcolato in base al principio di equità attuariale. Ciò che in sostanza la (8.4) pone in evidenza è che qualora la Compagnia offra la copertura al prezzo  $P > P^*$  il decisore non si assicura, affronta il rischio, mentre al prezzo  $P < P^*$  si assicura, valutando maggiore l'utilità derivante dalla perdita monetaria  $(C-P)$  che non quella derivante dalla perdita aleatoria. La somma addizionale  $\pi_p = [C-E(z)] - [C-P^*] = 0,5$  e pertanto il premio di rischio, il surplus che il contraente è disposto a pagare in aggiunta all'importo equo  $E(z) = 5,6$  per trasferire la situazione rischiosa all'Impresa. È interessan-

te infine notare che  $P^*$  poteva essere determinato mediante la intersezione con le ascisse della curva di indifferenza  $\bar{u}=1,72$  nel riferimento cartesiano  $\{E(z), \sigma(z)\}$ . Infatti risolvendo rispetto a  $\mu = E(z)$  l'equazione

$$(8.5) \quad C - \mu - \frac{1}{2} r C^2 - \frac{1}{2} r [\sigma^2(z) + \mu^2] + r C \mu = 1,72$$

e sostituendo i dati:

$$0,05 \mu^2 + 0,2 \mu - 3,08 = 0$$

Per l'appunto  $\mu = P^* = 6,1$  è il premio cercato.

\* \* \*

Si consideri ora un modello decisionale in cui la funzione di utilità sia di tipo esponenziale negativo  $u(x) = \frac{1}{r} [1 - e^{-rx}]$ , con  $r=10^{-4}$ , non si disponga del capitale iniziale e l'evento dannoso sia rappresentato dalla seguente variabile casuale:

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_1 = -5000 & \alpha = 0.005 \\ x_2 = 0 & 1-\alpha = 0.995 \end{cases}$$

Diversamente da quanto esposto in precedenza, si supponga che la Compagnia richieda per la copertura il premio  $P=-40$ . In queste condizioni il danno medio risulta  $E(x)=-25$  contro l'esborso certo di -40. Il fattore discriminante è immediatamente ricavabile dalla relazione

$$(8.6) \quad P^* = -\frac{1}{r} \log_e E[e^{-rx}]$$

ovvero

$$(8.7) \quad P^* = -10^4 \log_e [0,005 e^{0,5} + 0,995] = -32,38$$

Risultando  $|P| > |P^*|$  il decisore non si assicura.

\* \* \*

Supponiamo che l'importo del danno sia rappresentato dalla funzione  $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$ . In questo caso, non essendo nota la perdita eventuale, posto  $\lambda = \frac{1}{5000}$ , dalla (8.6) si ottiene:

$$(8.8) \quad P^* = -10^4 \log_e \left[ 0,005 \int_0^\infty e^{rx} f(x) dx + 0,995 \right]$$

Risolvendo l'integrale:

$$(8.9) \quad \int_0^\infty e^{rx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda-r)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda-r}$$

da cui il premio  $P^* = -49,88$ . Poiche'  $|P| < |P^*|$  l'offerta e' favorevole.

### 9. Il caricamento di sicurezza

Consideriamo un contratto per una copertura assicurativa che preveda l'esborso  $\tilde{x}$ , variabile casuale danno assolutamente continua, con distribuzione  $F(x) = Pr\{\tilde{x} \leq x\}$ . Come e' noto il minimo premio  $P$  che la Compagnia e' disposta a far pagare per accettare il rischio e' fornito dalla relazione di equivalenza che, in particolare per  $W=0$ , risulta:

$$(9.1) \quad \int_0^\infty u(P-x) dF(x) = u(0)$$

Per il principio di equita' attuariale invece si ha:

$$(9.2) \quad P = \int_0^\infty x dF(x)$$

e considerando un caricamento di sicurezza  $\lambda_0$ , l'esborso effettivo del contraente diviene  $(1+\lambda_0)P$ . Nell'ipotesi ora di un fondo di garanzia  $W \neq 0$  e per un portafoglio costituito da  $n$  contratti indipendenti ed omogenei rispetto alla copertura previ-

sta, la disponibilita' finanziaria dell'Impresa risulta:

$$(9.3) \quad W + n(1+\lambda_0)P$$

Nel caso di singolo impegno il risultato economico e' dunque  $W - \tilde{x}$ , e pertanto alla situazione di rischio  $\langle W; F(x) \rangle$  e' associata l'utilita' attesa:

$$(9.4) \quad u[W, F(x)] \stackrel{def}{=} \int_0^\infty u(W-x) dF(x)$$

Nel caso, invece, di  $n$  contratti il risultato economico e':

$$(9.5) \quad W + n(1+\lambda_0)P - \tilde{x}$$

dove  $\tilde{x} \stackrel{def}{=} \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \dots + \tilde{x}_n$  con distribuzione  $F^{(n)}(x) = Pr\{\tilde{x} \leq x\} = F * F * F * \dots * F$  convoluzione  $n$ -sima di  $F(x)$ . La situazione di rischio in questo caso diventa  $\langle W + n(1+\lambda_0)P; F^{(n)}(x) \rangle$  con utilita' attesa pari a

$$(9.6) \quad u[W + n(1+\lambda_0)P, F^{(n)}(x)] \stackrel{def}{=} \int_0^\infty u(W + n(1+\lambda_0)P - x) dF^{(n)}(x)$$

Consideriamo l'applicazione di una funzione di utilita' di tipo quadratico  $u(x) = -ax^2 + x$  con  $a = \frac{1}{2}r$ . Per la (9.4) otteniamo:

$$(9.7) \quad u[W, F(x)] = W - P - a(W-P)^2 - a\sigma^2(x)$$

dove  $P = \int_0^\infty x dF(x)$ , mentre  $\sigma^2(x) = \int_0^\infty (x-P)^2 dF(x)$ . Per la (9.6) invece risulta:

$$(9.8) \quad u[W + n(1+\lambda_0)P, F^{(n)}(x)] = W + n\lambda_0P - a(W + n\lambda_0P)^2 - an\sigma^2(x)$$

Se, d'altro canto, prendiamo in considerazione una funzione di utilita' esponenziale negativa, a meno di una costante additiva, del tipo  $u(x) = -e^{-ax}$ , per  $n=1$  (portafoglio costituito

da un unico contratto) si ottiene:

$$(9.9) \quad u[W, F(x)] = - \int_0^{\infty} e^{-a(W-x)} dF(x) = -e^{-aW} \int_0^{\infty} e^{ax} dF(x) = -e^{-aW} g(a)$$

In generale, considerando  $n$  impegni, l'utilità attesa risulta:

$$(9.10) \quad \begin{aligned} u[W+n(1+\lambda_0)P, F^{(n)}(x)] &= - \int_0^{\infty} e^{-a(W+n(1+\lambda_0)P-x)} dF^{(n)}(x) = \\ &= -e^{-a(W+n(1+\lambda_0)P)} \int_0^{\infty} e^{ax} dF^{(n)}(x) = \\ &= -e^{-a(W+n(1+\lambda_0)P)} g(a)^n \end{aligned}$$

Dall'esame della (9.10) sorgono due problemi interessanti: la determinazione del valore  $n^*$  e del valore  $\lambda_0^*$  che massimizzano l'utilità attesa. A tal fine introduciamo una *funzione di valutazione*  $H(n, \lambda_0)$  tale che:

$$(9.11) \quad \begin{aligned} H(n, \lambda_0) &\stackrel{def}{=} \log_e(-u) = \log_e \left\{ -u [W+n(1+\lambda_0)P, F^{(n)}(x)] \right\} = \\ &= n \log_e g(a) - aW - an(1+\lambda_0)P = n [\log_e g(a) - a(1+\lambda_0)P] - aW \end{aligned}$$

Poiché  $\max_n [u] = \min_n [-u]$ , essendo  $H(n, \lambda_0)$  funzione lineare in  $n$  e non dipendendo il numero dei contratti da  $\lambda_0$ , ne deriva che la strategia ottima della Compagnia consiste nell'assumere un portafoglio più numeroso possibile non appena risulti:

$$(9.12) \quad \log_e g(a) < a(1+\lambda_0)P$$

Per quanto concerne il secondo problema,  $\max_{\lambda_0} [u]$ , supponiamo che nella (9.11) il numero dei contratti  $n$  dipenda dal caricamento di sicurezza  $\lambda_0$ , ad esempio sussista una relazione lineare del tipo  $n(\lambda_0) = n_0 - \beta \lambda_0$ . In termini economici si può con-

siderare  $n(\lambda_0)$  quale *funzione di domanda* della copertura assicurativa in corrispondenza di un assegnato livello tariffario  $\lambda_0$ . Applicando pertanto alla (9.11) la condizione necessaria di massimo, si ha:

$$(9.13) \quad \begin{aligned} \frac{\partial H(n, \lambda_0)}{\partial n} \frac{dn(\lambda_0)}{d\lambda_0} + \frac{\partial H(n, \lambda_0)}{\partial \lambda_0} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -\beta [\log_e g(a) - a(1+\lambda_0)P] - n(\lambda_0) aP &= 0 \\ \Rightarrow \beta \log_e g(a) = \beta a(1+\lambda_0)P - a(n_0 - \beta \lambda_0)P & \\ \Rightarrow \beta \log_e g(a) = P [\beta a(1+2\lambda_0) - an_0] & \end{aligned}$$

equazione in  $\lambda_0$  che fornisce per l'appunto il valore ottimo cercato.

Capitolo Quarto

LA STABILITA' DELL'IMPRESA E IL RAPPORTO RIASSICURATIVO

1. Commento introduttivo

In questo capitolo verranno analizzati due problemi fondamentali per la gestione di una Compagnia di Assicurazioni; quello della solvibilita' o insieme di condizioni per le quali si e' in grado di assolvere agli impegni contrattuali, e quello della stabilita' del portafoglio, ovvero dei mezzi tecnici (riassicurativi) idonei a garantire un prestabilito grado di sicurezza. E' evidente che i due problemi in questione sono tra loro interdipendenti.

La valutazione complessiva del rischio dell'Impresa, nei suoi molteplici aspetti, puo' essere effettuata mediante due diversi atteggiamenti o punti di vista: l'uno di carattere statico, l'altro dinamico. Secondo l'impostazione classica o individualistica della Teoria del rischio, si tiene conto di un portafoglio chiuso e si esamina la probabilita' di rovina o con riferimento ad un unico esercizio (schema elementare) o con riferimento alla completa estinzione delle polizze. Alternativamente si puo' considerare un portafoglio aperto (acquisizione di nuovi contratti) nel suo complesso, impostazione collettiva(\*), e determinare la probabilita' di rovina in un periodo illimitato; da cui la dizione di rovina asintotica. In ambedue i casi l'analisi riguarda le condizioni affinche' la gestione non sia soggetta a fallimento e la ricerca di mezzi limitativi dell'a-

(\*) Lundberg: Ueber die theorie der Ruckversicherung, 6° Congr. Inter. Attuari, Vienna 1909, Some supplementary researches on the collective risk theory, Skand, Aktuar. 1932.

G. Ottaviani: Sulla teoria del rischio del Lundberg ed il suo legame con la teoria classica, G.I.I.A. 1940.

lea, nonche' dei criteri oggettivi per la determinazione dei piani di conservazione.

Nella nostra indagine ci intratterremo in una prima fase a considerare la solvibilita' secondo l'impostazione collettiva, in particolare tenendo conto di quanto gia' esposto nel primo capitolo. Successivamente, con riferimento ad un unico esercizio, verra' analizzata la probabilita' di rovina e definito il problema della stabilita'. Infine, per quanto concerne il rapporto riassicurativo, si considereranno alcuni modelli decisionali fondati sulla massimizzazione dell'utilita' attesa.

2. La solvibilita' dell'Impresa

Con riferimento ad una situazione di rischio <W, F(x, t)>, in cui con W indichiamo il fondo di garanzia e con F(x, t) la funzione di ripartizione del processo di Poisson composto, il problema della solvibilita' in un intervallo [0, t] puo' essere cosi' formulato. Ricordando che E{xi(t)} = lambda t mu = pi\_p e il volume dei premi puri di competenza o controprestazione dell'impegno globale, il guadagno aleatorio che la Compagnia potra' realizzare nel periodo risulta:

(2.1) y-tilde(t) = lambda t mu - x-tilde(t)

con valor medio

(2.2) E(y) = pi\_p - E(x) = 0

Se la variabile casuale y-tilde(t) e' distribuita secondo la funzione di ripartizione G(y, t), si ricava:

(2.3) G(y, t) = Pr{y-tilde(t) < y} = Pr{lambda t mu - x-tilde(t) < y} = Pr{x-tilde(t) > lambda t mu - y} = 1 - Pr{x-tilde(t) <= lambda t mu - y} =

= 1 - F[lambda t mu - y, t] = 1 - sum\_{k=0}^inf e^{-lambda t} (lambda t)^k / k! S^{k\*} (lambda t mu - y)

Indicando con W(0) la disponibilita' patrimoniale della Com-

pagnia in  $t=0$ , la disponibilita' al tempo  $t$  risulta dalla relazione:

$$(2.4) \quad W(t) = W(0) + [1+\lambda_0]\pi_p - \tilde{x}(t)$$

con  $\lambda_0$  un opportuno caricamento di sicurezza. Sostituendo la (2.1) si ottiene:

$$(2.5) \quad W(t) = W(0) + \lambda_0\pi_p + \tilde{y}(t)$$

E pertanto la *probabilita' di rovina*:

$$(2.6) \quad \alpha(t) \stackrel{def}{=} Pr\{W(t) < 0\} = Pr\{\tilde{y}(t) < -W(0) - \lambda_0\pi_p\} = G[-W(0) - \lambda_0\pi_p]$$

ovvero la probabilita' che nell'intervallo considerato  $[0, t]$  l'Impresa sia insolvente. Come si puo' notare la (2.6) e' determinata in corrispondenza della distribuzione  $F(x, t)$  del processo di Poisson generalizzato, presente nella (2.3). Se formuliamo l'ipotesi  $E(x)=t$  vale a dire che la speranza matematica degli esborsi e' uguale alla lunghezza stessa del periodo ( $t \stackrel{def}{=} \text{tempo operativo}$ ), la (2.4) diventa:

$$(2.7) \quad W(t) = W(0) + [1+\lambda_0]t - \tilde{x}(t)$$

Tale relazione sta a significare che in questo caso lo sviluppo del capitale della Compagnia e' descritto da un processo stocastico ad incrementi indipendenti. Se il fondo  $W(t)$  risulta negativo in un qualsiasi istante interno all'intervallo di osservazione  $[0, t]$ , l'Impresa e' insolvente e rovinata. Nell'impostazione collettiva lo studio viene esteso nel caso in cui  $t \rightarrow +\infty$ .

E' opportuno osservare che questo problema puo' essere impostato e risolto facendo riferimento ad una successione di variabili casuali del tipo:

$$(2.8) \quad \begin{cases} \tilde{W}_1 = W_0 + \tilde{\xi}_1 \\ \tilde{W}_2 = W_0 + \tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 \\ \tilde{W}_t = W_0 + \tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 + \dots + \tilde{\xi}_t \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

dove si indichi con  $\{\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_t, \dots\}$  i guadagni (o perdite) aleatori delle polizze che vengono a scadenza nei successivi esercizi.

La probabilita' che almeno una delle variabili casuali  $\tilde{W}_t$  risulti negativa definisce per l'appunto la probabilita' di rovina  $\alpha(t)$ .

Un confine superiore  $\alpha_0(t)$  per  $\alpha(t)$  si dimostra essere (De Finetti):

$$(2.9) \quad \alpha(t) \leq \alpha_0(t) \stackrel{def}{=} e^{-\gamma W_0}$$

in cui  $\gamma$ , definito *coefficiente di sicurezza*, e' direttamente proporzionale ai caricamenti di sicurezza applicati ed inversamente proporzionale alla variabilita' dei guadagni aleatori.

Nell'ambito della teoria asintotica il problema della rovina di un'Impresa puo' essere altresì considerato quale gioco  $\Gamma_t[p; q]$  tra un soggetto decisore e la natura (la massa degli assicurati) (\*).

Si supponga pertanto che il banco, nel nostro caso la Compagnia, giochi ogni partita contraddistinta dalla seguente variabile casuale guadagno:

$$(2.10) \quad \tilde{x} = \begin{cases} +1 & \text{prob. } p \\ -1 & \text{prob. } q=1-p \end{cases}$$

Disponendo inizialmente di un capitale  $0 \leq k \leq N$  (variabile

(\*) D. Fürst: *La rovina dei giocatori nel caso di riserva limitata*, G.I.I.A. 1956; *Il caso limite del problema della rovina dei giocatori nella ipotesi di riserva limitata*, G.I.I.A. 1957.

intera) la successione delle vincite o delle perdite definiscono a scadenza o un capitale finale uguale a zero, nel qual caso il banco e' rovinato e il gioco termina, oppure un capitale uguale ad  $N$ . Tale situazione competitiva viene considerata formalmente come una *passeggiata aleatoria* con una barriera assorbente in zero ed una riflettente in  $N$ . Se indichiamo con  $p_k^{(t)}$  la probabilita' che alla  $t$ -sima partita il banco possieda il capitale  $k$ , dal momento che stiamo considerando un processo markoviano, si ottiene:

$$(2.11) \quad p_k^{(t+1)} = p p_{k-1}^{(t)} + q p_{k+1}^{(t)} \quad (k=2, 3, \dots, N-1)$$

mentre per  $k=1$  e  $k=N$ :

$$(2.12) \quad \begin{aligned} p_1^{(t+1)} &= q p_2^{(t)} \\ p_N^{(t+1)} &= p p_{N-1}^{(t)} + p p_N^{(t)} \end{aligned}$$

con

$$p_0^{(t+1)} = p_0^{(t)} + q p_1^{(t)}$$

Poiche'

$$(2.13) \quad \sum_{k=0}^N p_k^{(t+1)} = \sum_{k=0}^N p_k^{(t)} = \sum_{k=0}^N p_k^{(0)} = 1$$

segue che note le probabilita'  $p_k^{(t+1)}$  ( $k=1, \dots, N$ ) rimane determinata la probabilita'  $p_0^{(t+1)}$  in quanto:

$$(2.14) \quad p_0^{(t+1)} = 1 - \sum_{k=1}^N p_k^{(t+1)}$$

ed e' quindi possibile ottenere  $p_k^{(t)}$  in corrispondenza delle variabili intere  $k$  e  $t$ . In tal modo la probabilita' di rovina viene definita quale situazione di fallimento del banco alla  $t$ -esima partita.

\* \* \*

Al fine di illustrare la dinamica del risultato economico di gestione (2.1) e del fondo (2.4), si considerino due diverse strategie tariffarie:

$$(2.15) \quad T1) \quad \bar{\pi} = (1+\lambda_0)\pi = (1+\lambda_0)\lambda t\mu$$

$$(2.16) \quad T2) \quad \bar{\pi} = \pi + \beta\sigma(x) = \lambda t\mu + \beta\sqrt{\lambda t\mu_2}$$

la prima riguardante un caricamento di sicurezza esplicito  $0 < \lambda_0 < 1$  applicato a  $\pi$ , la seconda con riferimento invece ad un'aliquota  $0 < \beta < 1$  dello s.q.m., ovvero un caricamento di sicurezza implicito.

Per la (2.15) il risultato economico diviene:

$$\tilde{y} = \bar{\pi} - \tilde{x} = (1+\lambda_0)\lambda t\mu - \tilde{x}$$

con media  $E(\tilde{y}) = \lambda_0\pi = \lambda_0\lambda t\mu$  e varianza  $\sigma^2(\tilde{y}) = \lambda t\mu_2 = \sigma^2(x)$ . Mentre, tenendo conto della posizione (2.16), si ricava:

$$(2.17) \quad \begin{aligned} E(\tilde{y}) &= \beta\sqrt{\lambda t\mu_2} = \beta\sigma(x) \\ \sigma^2(\tilde{y}) &= \lambda t\mu_2 = \sigma^2(x) \end{aligned}$$

Per quanto concerne il fondo finale, nelle due alternative esposte, sapendo che

$$(2.18) \quad W(t) = W(0) + \tilde{y}(t) = W(0) + \bar{\pi} - \tilde{x}$$

in base alla T1) risulta:

$$(2.19) \quad \begin{aligned} E[W(t)] &= W(0) + \lambda_0\pi = W(0) + \lambda_0\lambda t\mu \\ \sigma^2(W) &= \lambda t\mu_2 = \sigma^2(x) \end{aligned}$$

E per la T2):

$$(2.20) \quad \begin{aligned} E[W(t)] &= W(0) + \beta\sqrt{\lambda t\mu_2} = W(0) + E(\tilde{y}) \\ \sigma^2(W) &= \lambda t\mu_2 \end{aligned}$$

### 3. L'impostazione classica (unico esercizio)

Esaminiamo ora il problema della determinazione della probabilita' di rovina  $\alpha$  soffermando l'attenzione su un unico esercizio ( $t=1$ ) e trascurando i nuovi ingressi; potremo comunque svolgere medesime considerazioni qualora s'intenda seguire il portafoglio assicurato fino a completa scadenza di ogni polizza, nel qual caso occorre pero' valutare finanziariamente le conseguenze aleatorie (guadagni o perdite).

Supponiamo dunque che l'Impresa disponga di un portafoglio  $\mathcal{P}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n)$  costituito da  $n$  contratti indipendenti ed omogenei, riferiti cioe' alla medesima copertura assicurativa, ed indichiamo con  $\tilde{z}_i$  l'impegno aleatorio della  $i$ -sima polizza ( $i=1, 2, \dots, n$ ) con funzione di ripartizione  $S(z_i)$ . In questi termini il premio puro, se  $\tilde{z}_i$  e' assolutamente continua, risulta:

$$(3.1) \quad E(z_i) \stackrel{def}{=} \pi_i = \int_0^{\infty} z_i dS(z_i)$$

nell'ipotesi di non ripetibilita', ed il premio caricato:

$$(3.2) \quad \pi_i^c = (1 + \lambda_{oi}) \pi_i = \pi_i + c_i$$

in cui  $\lambda_{oi}$  e' un caricamento di sicurezza e  $c_i = \lambda_{oi} \pi_i$ . Il guadagno aleatorio che la Compagnia potra' realizzare nell'esercizio sul contratto  $i$ -simo e' pertanto:

$$(3.3) \quad \tilde{x}_i = \pi_i^c - \tilde{z}_i$$

con speranza matematica e varianza:

$$(3.4) \quad E(x_i) = \pi_i^c - E(z_i) = \pi_i^c - \pi_i = c_i$$

$$\sigma^2(x_i) = E[(x_i - c_i)^2] = E[(\pi_i + c_i - z_i - c_i)^2] = E[(z_i - \pi_i)^2] = \sigma^2(z_i)$$

Essendo gli  $n$  contratti indipendenti, l'impegno globale del portafoglio risulta:

$$(3.5) \quad \tilde{z} = \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 + \dots + \tilde{z}_n$$

con media

$$(3.6) \quad E(z) = E\left[\sum_{i=1}^n \tilde{z}_i\right] = \sum_{i=1}^n E(z_i) = \sum_{i=1}^n \pi_i = \pi$$

Tenuto conto inoltre del caricamento

$$(3.7) \quad c = \sum_{i=1}^n \lambda_{oi} \pi_i = \sum_{i=1}^n c_i$$

la massa premi diventa:

$$(3.8) \quad \pi^c = \pi + c$$

Di conseguenza il guadagno aleatorio realizzabile risulta:

$$(3.9) \quad \tilde{x} = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \dots + \tilde{x}_n$$

con media

$$(3.10) \quad E(x) = \sum_{i=1}^n E(x_i) = \sum_{i=1}^n c_i = c$$

e varianza:

$$(3.11) \quad \sigma^2(x) = \sum_{i=1}^n \sigma^2(x_i)$$

Se indichiamo con  $W$  il valore iniziale del fondo di garanzia, sara'  $W + \tilde{x}$  il valore del fondo a scadenza. Obiettivo fondamentale dell'Impresa e' quindi quello di condurre la gestione in modo che alla fine dell'esercizio il guadagno non scenda sotto il fondo di garanzia, o perlomeno sia piccola la probabilita':

$$(3.12) \quad \alpha \stackrel{def}{=} \Pr\{W + \tilde{x} < 0\} = \Pr\{\tilde{x} < -W\}$$

definita probabilita' di rovina, probabilita' che a chiusura il fondo si trovi in deficit. Parimenti la probabilita':

$$(3.13) \quad 1 - \alpha = \Pr\{\tilde{x} \geq -W\}$$



rappresenta una misura del grado di sicurezza. Nell'ipotesi che il portafoglio sia costituito da numerosi contratti, per  $n \rightarrow +\infty$ , in virtú del Teorema del Limite Centrale, la variabile casuale guadagno  $\tilde{x}$  si distribuisce Normalmente con media  $E(x)=c$  e varianza  $\sigma^2(x)$ . Vale a dire:

$$(3.14) \quad \alpha = Pr\{W + \tilde{x} < 0\} = \frac{1}{\sigma(x) \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-W} e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2(x)}} dx$$

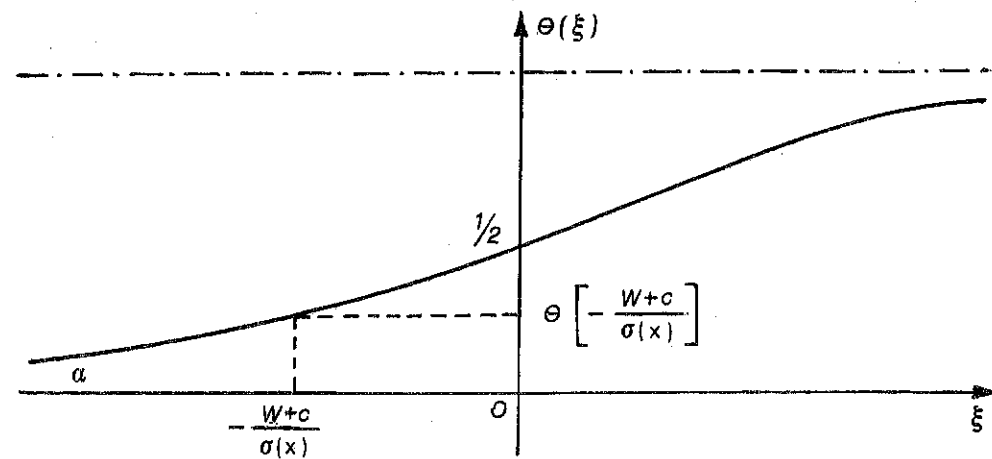
oppure, standardizzando:

$$(3.15) \quad \alpha = Pr\{\tilde{x} < -W\} = \theta \left[ -\frac{W+c}{\sigma(x)} \right]$$

in cui notoriamente:

$$(3.16) \quad \theta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

è la funzione di ripartizione della variabile casuale Normale standardizzata. È chiaro, dal grafico che segue, che la probabilità di rovina  $\alpha$  appena definita risulterà tanto minore quanto maggiore è il rapporto  $\left| -\frac{W+c}{\sigma(x)} \right|$ .



Come applicazione si supponga che una Compagnia di Assicurazioni disponga in un esercizio di un portafoglio composto da  $n = 1000$  polizze, rischi indipendenti ed omogenei (somiglianti) con distribuzione

$$(3.17) \quad \tilde{z}_i \sim S(z_i) = 1 - e^{-az_i}$$

e parametro  $a = 50$ . Assumendo un fondo di garanzia  $W_0 = 1$  ed un caricamento di sicurezza  $\lambda_{oi} = 1,5\%$  applicato a ciascun contratto, si intende determinare:

- a) la probabilità di rovina;
- b) la probabilità che il fondo a fine esercizio  $W_1$  sia compreso tra il 20% e l'80% del fondo iniziale  $W_0$ ;
- c) la probabilità di un fondo finale non negativo;
- d) la probabilità di un fondo finale maggiore od uguale alla capitalizzazione di  $W_0$  al tasso  $i = 40\%$  medio annuo di accrescimento.

Per quanto esposto in precedenza si ottiene:

$$E(z_i) = 0,02 = \frac{1}{a}; \quad \sigma^2(z_i) = \frac{1}{a^2} = 0,0004;$$

$$(3.18) \quad \sigma^2(z) = n\sigma^2(z_i) = 0,4; \quad \sigma(x) = \sigma(z) = 0,6325$$

$$\pi_i = 0,02; \quad \pi_i^c = (1 + 0,015)\pi_i = 0,0203; \quad c_i = \lambda_{oi}\pi_i = 0,0003$$

ed il risultato economico atteso  $E(x) = \sum c_i = nc_i = c = 0,3$  con variabilità  $\sigma(x) = 0,6325$ .

Sulla scorta di tali informazioni è possibile determinare le probabilità richieste.

a) PROBABILITÀ DI ROVINA

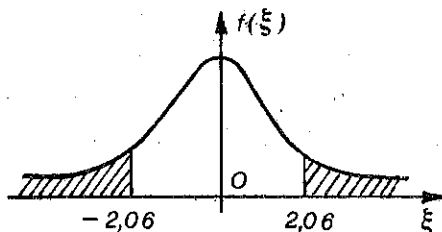
$$\alpha = Pr\{W_1 < 0\} = Pr\{\tilde{x} < -W_0\}$$

e standardizzando

$$\alpha = Pr \left\{ \xi < -\frac{W_0+c}{\sigma(x)} \right\} \text{ dove } \xi = \frac{\tilde{x} - c}{\sigma(x)}$$

Nel caso in esame risulta:

$$\begin{aligned} \alpha &= Pr\{\xi < -2,06\} = 1 - Pr\{\xi < 2,06\} = \\ &= Pr\{\xi \geq 2,06\} = 1 - \theta(2,06) = \\ &= 0,0197 \end{aligned}$$



b) SOGLIA DI RISCHIO

Per soglia di rischio s'intende l'intervallo  $[\alpha W_0, \beta W_0]$ , con  $\alpha = 20\%$  e  $\beta = 80\%$  nel quale deve essere contenuto il fondo finale  $W_1$ . Si ha quindi:

$$\gamma = Pr\{\alpha W_0 < W_1 < \beta W_0\} = Pr\{\alpha W_0 < W_0 + \tilde{x} < \beta W_0\} = Pr\{\alpha W_0 - W_0 < \tilde{x} < \beta W_0 - W_0\}$$

e standardizzando:

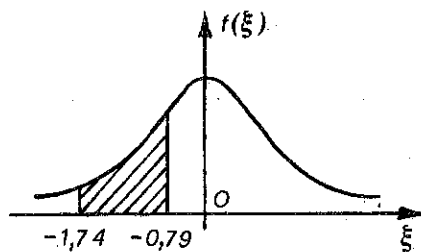
$$\gamma = Pr\left\{ \frac{W_0(\alpha-1) - c}{\sigma(x)} < \xi < \frac{W_0(\beta-1) - c}{\sigma(x)} \right\} =$$

$$= Pr\{-1,74 < \xi < -0,79\} =$$

$$= Pr\{\xi < -0,79\} -$$

$$- Pr\{\xi < -1,74\} =$$

$$= 1 - \theta(0,79) - [1 - \theta(1,74)] = \theta(1,74) - \theta(0,79) = 0,17383.$$



c, d) FONDO FINALE

Per quanto riguarda la probabilita' di un fondo finale  $W_1$  non negativo, si ottiene immediatamente:

$$1 - \alpha = Pr\{W_1 \geq 0\} = Pr\{\xi < 2,06\} = \theta(2,06) = 0,98030$$

L'ultima probabilita invece, riferita alla capitalizzazione del fondo iniziale, risulta:

$$\eta = Pr\{W_1 \geq (1+i)W_0\} = Pr\{W_0 + x > (1+i)W_0\} = Pr\{\tilde{x} \geq iW_0\} = 1 - Pr\{x < iW_0\}$$

e standardizzando:

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - Pr\left\{ \frac{\tilde{x} - c}{\sigma(x)} < \frac{iW_0 - c}{\sigma(x)} \right\} = 1 - Pr\left\{ \xi < \frac{iW_0 - c}{\sigma(x)} \right\} = \\ &= 1 - Pr\{\xi < 0,16\} = 1 - \theta(0,16) = 0,43644 \end{aligned}$$

4. La stabilita' dell'Impresa

Una volta definita la probabilita' di rovina, affrontiamo il problema della stabilita' della gestione in un esercizio; questione che naturalmente introduce al rapporto riassicurativo. Nel caso in cui la variabile casuale  $\tilde{x}$  non si distribuisca Normalmente (portafoglio poco numeroso), il Cantelli(\*) ha fornito un confine superiore  $\alpha_0$  di  $\alpha$ , in base ad una generalizzazione del teorema di Bienaymè-Tchebycheff, e precisamente:

$$(4.1) \quad \alpha = Pr\{\tilde{x} < -W\} \leq \alpha_0 \stackrel{def}{=} \frac{1}{1 + \left(\frac{W+c}{\sigma(x)}\right)^2}$$

Risulta che a parita' di guadagno medio  $c$ , quanto minore e' la varianza  $\sigma^2(x)$ , tanto maggiore e' il grado di sicurezza  $\alpha^* = W+c/\sigma(x)$  dell'Impresa. Assumendo pertanto quale indice di sicurezza il fattore  $W+c/\sigma(x)$ , la Compagnia dovra' gestire il portafoglio in modo da mantenerlo stabile, al fine di non alterare la propria situazione finanziaria. Il problema della riduzione della variabilita' di  $\tilde{x}$ , e quindi di  $\tilde{z}$ , viene generalmente affrontato ricorrendo al rapporto riassicurativo, trattenendo per proprio conto una parte del portafoglio. Sulla misura della quota conservata, vale a dire sulla determinazione del pieno di conservazione, ci soffermeremo nel prossimo paragrafo

(\*) F.P. Cantelli: *Su due applicazioni di un teorema di G.Boole alla statistica matematica*, Atti della R. Acc. dei-Lincei, Roma 1917.

trattando in particolare il noto *problema dei pieni relativi ed assoluti* dovuto a De Finetti<sup>(\*)</sup>. Per il momento osserviamo che il pieno di conservazione deve essere comunque stabilito in modo tale che l'indice  $\alpha^*$  non diminuisca, facendo pertanto aumentare la probabilita' di rovina  $\alpha_0$ , e rimanga su livelli stabiliti. Ad esempio per un nuovo contratto  $\tilde{z}_0$  che preveda l'impegno aleatorio  $S_0$  con probabilita'  $p_0$  oppure nulla con probabilita'  $q_0$ , dovra' verificarsi la disuguaglianza:

$$(4.2) \quad \alpha^* = \frac{W+c}{\sigma(x)} \leq \frac{W+c+\lambda_0 S_0}{\sqrt{\sigma^2(x)+p_0 q_0 S_0^2}}$$

dove il caricamento di sicurezza  $\lambda_0$  e' applicato all'importo  $S_0$ .

Affinche'  $\alpha_0$  rimanga stabile la Compagnia potra' acquisire questo nuovo impegno compatibilmente con il vincolo:

$$(4.3) \quad S_0 \leq \frac{\frac{2\lambda_0}{W+c}}{\frac{p_0 q_0}{\sigma^2(x)} - \left(\frac{\lambda_0}{W+c}\right)^2}$$

altrimenti vedra' compromesso il grado di solvibilita'.

### 5. Il problema dei pieni

Supponiamo che al fine di aumentare l'indice di sicurezza  $W+c/\sigma(x)$ , vale a dire nell'ottica di contrarre la probabilita' di rovina, l'Impresa trasferisca parte del portafoglio ad una Compagnia riassicuratrice. In tal modo naturalmente vi sara' un sacrificio nel guadagno atteso; il problema che vogliamo esaminare e' appunto quello di individuare la strategia ottima di trasferimento del rischio, e quindi la migliore politica assunzionale o determinazione dei pieni di conservazione per ogni contratto del portafoglio assicurato. Con riferimento ad un trat-

(\*) B. De Finetti: *Il problema dei pieni*, G.I.I.A. 1940.

tato in quota l'analisi puo' essere effettuata in due fasi distinte; nella prima si risolve il cosiddetto *problema relativo* attraverso il quale si graduano le ritenzioni dei singoli rischi a meno di un coefficiente di proporzionalita'; nella seconda fase, invece, si risolve il *problema assoluto*, vale a dire si determina il coefficiente di proporzionalita' (moltiplicatore di Lagrange) fissando un livello minimo della probabilita' di rovina. Si consideri dunque, con riferimento ad un unico esercizio, il portafoglio  $\mathcal{P}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n)$  gia' definito nel terzo paragrafo. Se indichiamo con:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \beta_i &= \text{quota conservata dall'Impresa per il contratto} \\ &\quad i\text{-simo } (0 \leq \beta_i \leq 1); \\ 1-\beta_i &= \text{quota ceduta al riassicuratore} \end{aligned}$$

allora il guadagno sulla  $i$ -sima polizza diventa  $\beta_i \tilde{x}_i$  con valor medio  $E(\beta_i x_i) = \beta_i c_i$  e varianza  $\sigma^2(\beta_i x_i) = \beta_i^2 \sigma^2(x_i)$ . Per l'intero portafoglio il guadagno aleatorio di conseguenza risulta:

$$(5.2) \quad \tilde{x}_\beta = \beta_1 \tilde{x}_1 + \beta_2 \tilde{x}_2 + \dots + \beta_n \tilde{x}_n$$

con speranza matematica

$$(5.3) \quad E(\tilde{x}_\beta) \stackrel{def}{=} c_\beta = \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2 + \dots + \beta_n c_n$$

e varianza

$$(5.4) \quad \sigma^2(\tilde{x}_\beta) \stackrel{def}{=} \sigma_\beta^2 = \beta_1^2 \sigma^2(x_1) + \beta_2^2 \sigma^2(x_2) + \dots + \beta_n^2 \sigma^2(x_n)$$

Mediante il rapporto riassicurativo la probabilita' di rovina sara' dunque:

$$(5.5) \quad \hat{\alpha} = Pr\{W+\tilde{x}_\beta < 0\} = \theta \left[ -\frac{W+c_\beta}{\sigma_\beta} \right]$$

e, nel caso non sia valida l'ipotesi di Normalita' di  $\tilde{x}_\beta$ , il confine superiore:

$$(5.6) \quad Pr\{W + \tilde{x}_\beta < 0\} < \frac{1}{1 + \left[ \frac{W + c_\beta}{\sigma_\beta} \right]^2}$$

Ciò posto, il problema relativo consiste nel determinare le aliquote ottime  $\beta_i^*$  da conservare al fine di rendere minima la probabilità di fallimento. Vale a dire si tratta di risolvere il seguente problema di minimo vincolato, con funzione obiettivo espressa da una forma quadratica:

$$(5.7) \quad \begin{cases} \min_{\{\beta_i\}} \sigma_\beta^2 = \beta_1^2 \sigma^2(x_1) + \beta_2^2 \sigma^2(x_2) + \beta_3^2 \sigma^2(x_3) + \dots + \beta_n^2 \sigma^2(x_n) \\ \beta_1 c_1 + \beta_2 c_2 + \dots + \beta_n c_n = c_\beta \\ 0 \leq \beta_i \leq 1 \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

Come si può notare la funzione obiettivo si riferisce alla variabilità del portafoglio, mentre il vincolo rappresenta la speranza matematica del guadagno totale, ovviamente ridotto rispetto alla condizione iniziale, che l'Impresa stessa stabilisce; ad esempio  $c_\beta = \beta c$  una opportuna aliquota  $\beta$  del caricamento complessivo  $c$ . Dal Lagrangiano:

$$(5.8) \quad L(\beta_i, k) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \beta_i^2 \sigma^2(x_i) + k \left[ c_\beta - \sum_{i=1}^n \beta_i c_i \right]$$

applicando le condizioni necessarie di minimo

$$(5.9) \quad \frac{\partial L(\beta_i, k)}{\partial \beta_i} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial L(\beta_i, k)}{\partial k} = 0$$

si ricava la strategia ottima:

$$(5.10) \quad \beta_i^* = \frac{k}{2} \frac{c_i}{\sigma^2(x_i)}$$

la quale dipende dal moltiplicatore di Lagrange  $k$ , indetermi-

nato, e deve essere tale che  $0 \leq \beta_i^* \leq 1$ .

Per risolvere, come seconda fase, il problema del pieno assoluto, si ordinano le  $n$  polizze per valori decrescenti del rapporto  $c_i/\sigma^2(x_i)$  indicando con  $n_k$  il numero d'ordine (dipendente da  $k$ ) della ultima polizza; se qualche  $\beta^* = 1$  il contratto in questione non viene riassicurato. Sostituendo pertanto la (5.10) nel vincolo lineare, risulta:

$$(5.11) \quad c_\beta = \beta c = \frac{k}{2} \sum_{i=1}^{n_k} \frac{c_i^2}{\sigma^2(x_i)} + \sum_{i=n_k+1}^n c_i$$

relazione che, nota l'aliquota  $\beta$ , consente di ricavare il moltiplicatore  $k$ . In corrispondenza della strategia ottima  $\beta_i^*$  si ottiene il seguente valore della funzione obiettivo:

$$(5.12) \quad \sigma_\beta^2 = \frac{k^2}{4} \sum_{i=1}^{n_k} \frac{c_i^2}{\sigma^2(x_i)} + \sum_{i=n_k+1}^n \sigma^2(x_i)$$

In modo del tutto equivalente, per determinare il parametro  $k$  si può fissare un livello stabilito  $\hat{\alpha}_0$  della probabilità di rovina

$$(5.13) \quad \hat{\alpha}_0 = Pr\{\tilde{x}_\beta < -W\} = \theta \left[ - \frac{W + c_\beta}{\sigma_\beta} \right]$$

e, dal momento che per la (5.11) e (5.12) il coefficiente di sicurezza  $W + c_\beta/\sigma_\beta$  dipende da  $k$ , possiamo scrivere:

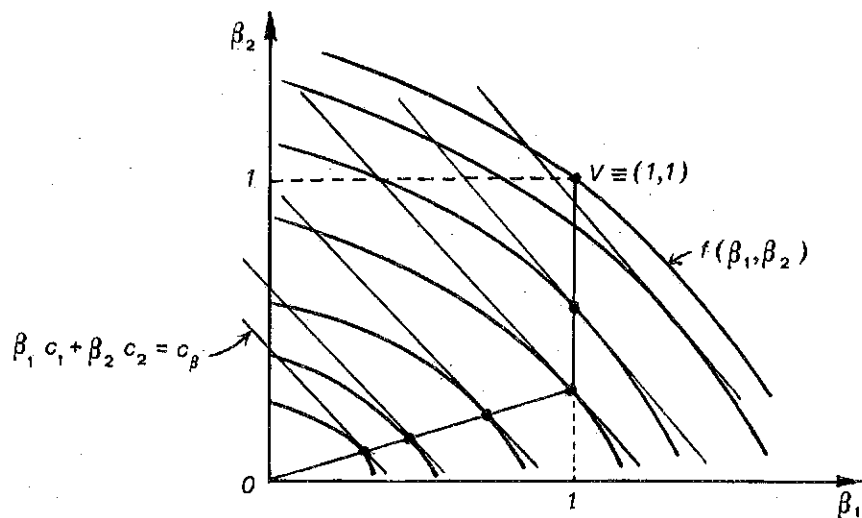
$$(5.14) \quad - \frac{W + c_\beta}{\sigma_\beta} = \varphi(k)$$

e di conseguenza la relazione

$$(5.15) \quad \theta[\varphi(k)] = \hat{\alpha}_0$$

consente di ricavare numericamente il valore del moltiplicatore di Lagrange  $k$ .

E' interessante osservare che dal punto di vista geometrico la funzione obiettivo determina in  $S^n$  (spazio euclideo) degli ellissoidi, mentre il vincolo ha come immagine degli iperpiani paralleli. Nel caso particolare  $n=2$ , nel riferimento cartesiano  $(\beta_1, \beta_2)$  le linee di livello  $f(\beta_1, \beta_2) = \beta_1^2 \sigma^2(x_1) + \beta_2^2 \sigma^2(x_2)$  sono ellissi omotetiche riferite agli assi, mentre il vincolo  $\beta_1 c_1 + \beta_2 c_2 = c_\beta$  definisce al variare di  $c_\beta$  un insieme di rette parallele con coefficiente angolare negativo.



Il vincolo  $0 \leq \beta_i^* \leq 1$  ( $i=1, 2$ ) impone che la soluzione ottima  $\beta_i^*$  deve essere interna o sulla frontiera del quadrato di lato unitario con vertici opposti nell'origine  $O \equiv (0,0)$  e nel punto  $V \equiv (1,1)$ . Al variare di  $c_\beta$  la strategia ottima e quella relativa ai punti di tangenza con le ellissi.

Come applicazione si consideri un portafoglio costituito da  $n = 10.000$  contratti, ripartiti nei seguenti gruppi:

G. I.

$$n_1 = 3.000 \quad S(z_i) = 1 - e^{-60 z_i} \quad \lambda_0 = 1\%$$

G. II.

$$n_2 = 5.000 \quad S(z_i) = 1 - e^{-40 z_i} \quad \lambda_0 = 1,70\%$$

G. III.

$$n_3 = 2.000 \quad S(z_i) = 1 - e^{-80 z_i} \quad \lambda_0 = 0,5\%$$

Tenendo presente che la Compagnia stabilisca  $\beta = 30\%$  sul caricamento complessivo, le aliquote da conservare ( $\beta_1^*, \beta_2^*, \beta_3^*$ ) per ciascun gruppo possono essere determinate una volta definita la funzione obiettivo ed il vincolo lineare. Si ottiene innanzi tutto:

	$\pi_i$	$\sigma^2(z_i) = \sigma^2(x_i)$	$\sigma^2(x_1) = n_1 \sigma^2(x_i)$
G. I.	0,017	0,00028	0,833
$n_1 = 3.000$	$c_i = \lambda_0 \pi_i$	$c_1 = n_1 \lambda_0 \pi_i = n_1 c_i$	
	0,00017	0,51	
	$\pi_i$	$\sigma^2(z_i) = \sigma^2(x_i)$	$\sigma^2(x_2) = n_2 \sigma^2(x_i)$
G. II.	0,025	0,000625	3,125
$n_2 = 5.000$	$c_i = \lambda_0 \pi_i$	$c_2 = n_2 c_i$	
	0,000425	2,125	
	$\pi_i$	$\sigma^2(z_i) = \sigma^2(x_i)$	$\sigma^2(x_3) = n_3 \sigma^2(x_i)$
G. III.	0,0125	0,000156	0,3125
$n_3 = 2.000$	$c_i = \lambda_0 \pi_i$	$c_3 = n_3 c_i$	
	0,0000625	0,125	

In base a tali informazioni il problema di minimo diviene:

$$(5.16) \quad \begin{cases} \min 0,833 \beta_1^2 + 3,125 \beta_2^2 + 0,313 \beta_3^2 \\ \beta_i \\ 0,51 \beta_1 + 2,125 \beta_2 + 0,125 \beta_3 = 0,828 \\ 0 < \beta_i < 1. \end{cases}$$

ed imponendo le condizioni necessarie di ottimo (5.10):

$$\begin{aligned}
 \beta_1^* &= \frac{k}{2} \frac{c_1}{\sigma^2(x_1)} = 0,305 k \\
 \beta_2^* &= \frac{k}{2} \frac{c_2}{\sigma^2(x_2)} = 0,34 k \\
 \beta_3^* &= \frac{k}{2} \frac{c_3}{\sigma^2(x_3)} = 0,2 k
 \end{aligned}
 \tag{5.17}$$

Sostituendo le aliquote  $\beta_i^*$  nel vincolo lineare si ricava pertanto una relazione in  $k$ :

$$0,156 k + 0,723 k + 0,025 k = 0,828
 \tag{5.18}$$

da cui:

$$k^* = 0,916.$$

Una volta noto il valore del moltiplicatore di Lagrange, le quote ottime da conservare sono univocamente determinate. Infatti, per la (5.18) e (5.17):

$$\beta_1^* = 0,28 \quad \beta_2^* = 0,31 \quad \beta_3^* = 0,18
 \tag{5.19}$$

Lo s.q.m. del portafoglio  $\sigma_x = 2,0665$  si riduce in  $\sigma_\beta = 0,6129$  dopo il trasferimento riassicurativo, valore desunto dalla funzione obiettivo in corrispondenza delle determinazioni ottime. Di conseguenza, la probabilita' di rovina ex ante:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= Pr\{\tilde{x} < 0\} = Pr\left\{\xi < -\frac{c}{\sigma_x}\right\} = Pr\{\xi < -1,82\} = \\
 &= 1 - \theta(1,82) = 0,03438
 \end{aligned}
 \tag{5.20}$$

si modifica come segue:

$$\begin{aligned}
 \alpha_\beta &= Pr\{\tilde{x}_\beta < 0\} = Pr\left\{\xi < -\frac{c_\beta}{\sigma_\beta}\right\} = Pr\{\xi < -2,98\} = \\
 &= 1 - \theta(2,98) = 0,00144
 \end{aligned}
 \tag{5.21}$$

## 6. Il modello decisionale

Le considerazioni fin qui svolte possono essere sviluppate mediante un modello decisionale il quale misuri, in termini generali, le strategie ottimali della Compagnia nel rapporto riassicurativo al fine di ridurre la probabilita' di rovina.

Supponiamo pertanto che in un prefissato periodo temporale l'Impresa disponga di un portafoglio  $\mathcal{P}$  cui sia associato l'impegno aleatorio  $\tilde{x}$  con distribuzione  $F(x) = Pr\{\tilde{x} \leq x\}$ . Indicando con  $W$  la disponibilita' finanziaria iniziale, comprendente il fondo di garanzia e la massa premi, l'importo a disposizione alla fine del periodo considerato sara'  $\tilde{y} = W - \tilde{x}$  con distribuzione:

$$\begin{aligned}
 G(y) &= Pr\{\tilde{y} < y\} = Pr\{W - \tilde{x} < y\} = Pr\{W - y < \tilde{x}\} = \\
 &= 1 - Pr\{\tilde{x} \leq W - y\} = 1 - F(W - y)
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$

La  $G(y)$  e' comunemente considerata *funzione di profitto* riferita alla situazione di rischio  $\langle W; F \rangle$ . In questi termini la probabilita' di rovina a fine periodo risulta:

$$\begin{aligned}
 \alpha(W, F) &\stackrel{def}{=} Pr\{\tilde{y} < 0\} = Pr\{W - \tilde{x} < 0\} = \\
 &= Pr\{\tilde{x} > W\} = 1 - Pr\{\tilde{x} \leq W\} = 1 - F(W) = \int_W^\infty dF(x)
 \end{aligned}
 \tag{6.2}$$

con profitto atteso

$$E(y) = W - \int_0^\infty x dF(x)
 \tag{6.3}$$

Se alla Compagnia vengono offerte  $n$  possibili proposte riassicurative, le quali modificano in sostanza la situazione di

rischio iniziale  $\langle W; F \rangle$  in successive situazioni  $\langle W_i; F_i \rangle$  per  $i=1, 2, \dots, n$ , la scelta potra' basarsi come metro di valutazione su quella offerta che massimizzi il profitto atteso (6.3) con il vincolo  $\alpha(W_i, F_i) \leq \alpha_0(W_i, F_i)$ , ovvero compatibilmente con la condizione che la probabilita' di rovina relativa ad ogni alternativa rischiosa si mantenga sempre inferiore ad un livello prefissato  $\alpha_0(W_i, F_i)$ .

Qualora invece si supponga che un'Impresa cessionaria con portafoglio  $\tilde{X} \sim F(x)$  debba valutare l'opportunita' dell'assunzione di un rischio  $\tilde{Z} \sim S(z)$  in riassicurazione con incasso premi  $\hat{P}$ , nell'ipotesi che le variabili casuali  $\tilde{X}$  e  $\tilde{Z}$  siano indipendenti, la distribuzione di rischio cumulata risulta:

$$(6.4) \quad H(u) = \int_0^\infty F(u-z) dS(z) = F(x) * S(z) \quad (u=x+z)$$

Pertanto, se indichiamo con

$$(6.5) \quad \bar{u}[W, F] \stackrel{def}{=} \int_0^\infty u[W-x] dF(x)$$

l'utilita' attesa associata alla situazione di rischio iniziale  $\langle W; F \rangle$ , l'offerta  $\tilde{Z} \sim S(z)$  comporta:

$$(6.6) \quad \bar{u}[W+\hat{P}, H] \stackrel{def}{=} \int_0^\infty u[W+\hat{P}-u] dH(u)$$

ovvero una nuova utilita' attesa, relativa pero' alla situazione  $\langle W+\hat{P}; H \rangle$ . In base al criterio decisionale fondato sulla massimizzazione delle espressioni (6.5) e (6.6), la proposta sara' accettata se:

$$(6.7) \quad \bar{u}[W+\hat{P}, H] > \bar{u}[W, F]$$

La relazione di equivalenza  $\bar{u}[W+\hat{P}, H] = \bar{u}[W, F]$ , come noto, consente di determinare il minimo premio  $\hat{P}$  che si puo' richiedere assumendo il rischio  $\tilde{Z}$ . Si noti che considerando la disponibilita' finanziaria come somma esplicita del fondo di garanzia  $W$  e massa premi  $P$ , tale che naturalmente

$$(6.8) \quad P \stackrel{def}{=} \int_0^\infty x dF(x)$$

la (6.5) puo' essere anche scritta:

$$(6.9) \quad \bar{u}[W, F] = \int_0^\infty u[W+P-x] dF(x) \stackrel{def}{=} u^*(W)$$

e quindi in luogo della (6.6):

$$(6.10) \quad \bar{u}[W+\hat{P}, H] = \int_0^\infty u[W+P+\hat{P}-u] dH(u) = \int_0^\infty u^*[W+\hat{P}-z] dS(z)$$

## 7. Il trasferimento del rischio

Per quanto andremo dicendo nei prossimi paragrafi, e' opportuno soffermare l'attenzione sulla dinamica del trasferimento del rischio dalla Compagnia cedente a quella cessionaria. Ipotizzando pertanto che l'impegno aleatorio della cedente sia rappresentato dalla variabile casuale  $\tilde{X} \sim F(x)$ , consideriamo la ripartizione  $(\tilde{X}_1; \tilde{X}_2)$  tale che  $\tilde{X} = \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2$ , in cui con  $\tilde{X}_1$  si indichi l'alea che la cedente intende correre per proprio conto e con  $\tilde{X}_2$  l'alea trasferita. Sia la variabile casuale doppia  $(\tilde{X}_1; \tilde{X}_2)$  assolutamente continua con densita'  $f(x_1, x_2)$ , dove

$$(7.1) \quad F(x) \stackrel{def}{=} \int_0^x \int_0^s f(s-u, u) duds$$

La cessione di  $\tilde{x}_2$  implica per la cedente una nuova situazione di rischio con distribuzione:

$$(7.2) \quad F_1(x) = \int_0^x \left[ \int_0^\infty f(x_1, x_2) dx_2 \right] dx_1$$

mentre per la cessionaria l'acquisizione di un portafoglio con distribuzione:

$$(7.3) \quad F_2(x) = \int_0^x \left[ \int_0^\infty f(x_1, x_2) dx_1 \right] dx_2$$

cui compete il premio  $P_2 = \int_0^\infty x dF_2(x)$ . In altri termini, per la cedente avremo la seguente modifica della situazione di rischio:

$$(7.4) \quad \langle W; F \rangle \longrightarrow \langle W - P_2; F_1(x) \rangle$$

mentre per la cessionaria la trasformazione  $\langle W_0 + P_2; F_2(x) \rangle$ , considerando un fondo iniziale  $W_0$ .

Ciò che verrà analizzato nel prosieguo è per l'appunto il problema riassicurativo tenendo conto della funzione di utilità come metro di valutazione tra le alternative e delle trasformazioni sulle situazioni di rischio.

## 8. Il trattato in quota

Si supponga che inizialmente l'Impresa cedente si trovi nella situazione di rischio  $\langle W; F \rangle$  con utilità attesa:

$$(8.1) \quad \bar{u}[W, F] = \int_0^\infty u[W - x] dF(x)$$

e massa premi  $P$ :

$$(8.2) \quad P = \int_0^\infty x dF(x)$$

Mediante un trattato in quota con un'Impresa cessionaria si stabilisca di voler conservare un'aliquota  $[1-k]$  del proprio portafoglio ( $0 \leq k \leq 1$ ) e trasferire l'aliquota  $k$ . Come onere del trasferimento  $kx$  si supponga che venga corrisposto altresì un caricamento  $\lambda$  sui premi  $kP$  ceduti. In tal modo, il guadagno della cedente prima del rapporto riassicurativo risulta:

$$(8.3) \quad \tilde{y} = W - \tilde{x}$$

e dopo il trasferimento:

$$(8.4) \quad \tilde{y} = W - [1+\lambda]kP - [1-k]\tilde{x}$$

Di conseguenza l'utilità attesa sarà, nella nuova situazione:

$$(8.5) \quad \bar{u}[\tilde{y}] \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty u[W - (1+\lambda)kP - (1-k)x] dF(x)$$

D'altro canto verrà anche modificata la probabilità di rovina e la speranza matematica del profitto  $\tilde{y}$ . Infatti, dalle condizioni ex ante:

$$(8.6) \quad E(y) = W - \int_0^\infty x dF(x) \quad ; \quad \alpha(W, F) = \int_W^\infty dF(x)$$

si ottengono le determinazioni ex post:

$$(8.7) \quad E(y) = W - [1+\lambda]kP - \int_0^\infty [1-k]x dF(x)$$



$$(8.8) \quad \alpha(W, F) \stackrel{def}{=} Pr\{\tilde{y} < 0\} = 1 - Pr\left\{\tilde{x} \leq \frac{W - (1+\lambda)kP}{1-k}\right\} =$$

$$= 1 - F\left[\frac{W - (1+\lambda)kP}{1-k}\right] = \int_{\frac{W - (1+\lambda)kP}{1-k}}^{\infty} dF(x)$$

L'obiettivo della Compagnia cedente consiste nel ricercare l'aliquota  $k^*$  che massimizza l'utilità attesa (8.5):

$$\max_{0 \leq k \leq 1} \bar{u}(\tilde{y})$$

problema risolvibile numericamente qualora siano assegnate la funzione di utilità  $u(\cdot)$  e la funzione di ripartizione  $F(x)$  dell'impegno aleatorio  $\tilde{x}$ .

Come applicazione prenderemo in considerazione funzioni di utilità concave e distribuzione:

$$(8.9) \quad F(x) = 1 - e^{-x}$$

Si consideri dunque:

$$(8.10) \quad u(x) = -ax^2 + x + b \quad (b \geq 0)$$

con coefficiente assoluto di avversione al rischio  $\rho_a = 2a/1-2ax$  e valore critico  $x_c = 1/2a$ . Pertanto dovrà sussistere la limitazione  $W < 1/2a$ . Il valore dell'aliquota  $k^*$  soddisfacente al problema di ottimo può essere ricavato come segue. Dal momento che, per la (8.9):

$$(8.11) \quad P = \int_0^{\infty} x dF(x) = \int_0^{\infty} x d(1 - e^{-x}) = 1$$

sostituendo la (8.10) nella (8.5) si ottiene:

$$(8.12) \quad \bar{u}[\tilde{y}] = -\alpha\{W^2 + (1+\lambda)^2 k^2 + 2(1-k)^2 - 2W(1+\lambda)k -$$

$$- 2W(1-k) + 2(1+\lambda)(k-k^2)\} + W - (1+\lambda)k - 1 + k + b$$

Imponendo poi la condizione necessaria di massimo, si ricava:

$$(8.13) \quad \frac{\partial \bar{u}[\tilde{y}]}{\partial k} = 0 \implies k^* = \frac{2\alpha(1-\lambda) - \lambda(1-2\alpha W)}{2\alpha(1+\lambda^2)}$$

Lo studio può essere completato calcolando in funzione di  $k^*$  il profitto atteso (8.7) e la probabilità di rovina (8.8).

Si prenda ora in considerazione il caso in cui la funzione di utilità della Compagnia cedente sia di tipo esponenziale negativo:

$$(8.14) \quad u(x) = \frac{1}{r} [1 - e^{-rx}]$$

con coefficiente assoluto di avversione al rischio costante,  $\rho_a = r$ . In questo caso l'utilità attesa (8.5) risulta:

$$(8.15) \quad \bar{u}[\tilde{y}] = \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{e^{-r[W - (1+\lambda)k]}}{1 - r(1-k)} \right]$$

e la condizione di massimo implica

$$(8.16) \quad k^* = 1 - \frac{\lambda}{r(1+\lambda)}$$

Dal confronto della (8.16) con la (8.13) si nota che nell'ipotesi di adozione di una funzione di utilità esponenziale negativa, l'aliquota ottima  $k^*$  da cedere non dipende dalla disponibilità finanziaria  $W$  ma, a parità del caricamento di sicurezza  $\lambda$  richiesto dalla cessionaria, dal coefficiente  $r$  di avversione al rischio.

### 9. Le strategie di coalizione

Per analisi delle strategie di coalizione intendiamo lo studio del comportamento di un insieme di Compagnie le quali costituiscano un pool al fine di ripartire equamente le perdite eventuali gravanti sul gruppo. Si supponga dunque che in un ipotetico mercato assicurativo operino  $n$  Imprese con medesima predisposizione al rischio, ed ognuna gestisca un portafoglio  $\tilde{x}_i \sim F(x_i)$ , con disponibilita' finanziaria  $W_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) ed incasso premi  $P_i = \int_0^\infty x_i dF(x_i)$ . L'utilita' attesa iniziale della  $i$ -sima Compagnia risulta:

$$(9.1) \quad \bar{u}_i [W_i, F] = \int_0^\infty u [W_i - x] dF(x)$$

Se le  $n$  Imprese stabiliscono di costituire una coalizione, ciascuna parteciperà con la copertura  $\tilde{z}/n$  per ripartire la perdita totale del gruppo.

$$(9.2) \quad \tilde{z} = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \dots + \tilde{x}_n$$

variabile casuale con funzione di ripartizione  $F^{n*}(x) \stackrel{\text{def}}{=} H(z)$ , nell'ipotesi che gli impegni aleatori  $\tilde{x}_i = \tilde{x}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) siano indipendenti e somiglianti. In tal modo l'utilita' attesa nel pool risulta:

$$(9.3) \quad \bar{u}_i [W_i, H] = \int_0^\infty u \left[ W_i - \frac{z}{n} \right] dH(z)$$

ed e' evidente che la volonta' della  $i$ -sima Compagnia a partecipare e rimanere nel gruppo e' condizionata dalla disuguaglianza:

$$(9.4) \quad \bar{u}_i [W_i, F] < \bar{u}_i [W_i, H]$$

Indicando con  $\pi \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty z dH(z)$  la massa premi necessaria per fronteggiare l'impegno complessivo  $\tilde{z}$ , si supponga di voler

trasferire una quota  $kz$  ad una Compagnia riassicuratrice, trattando il rischio residuo  $(1-k)z$ , con  $0 \leq k \leq 1$ , e pagando di conseguenza l'importo  $(1+\lambda)k\pi$ , con  $\lambda$  un opportuno caricamento di sicurezza richiesto dalla cessionaria. Ne deriva che la (9.3) diviene:

$$(9.5) \quad \bar{u}_i [W_i, H; k] = \int_0^\infty u \left[ W_i - (1+\lambda)k \frac{\pi}{n} - (1-k) \frac{z}{n} \right] dH(z)$$

Il problema di decisione si riduce pertanto a determinare ancora una volta l'aliquota  $k^*$  tale da massimizzare l'utilita' attesa (9.5). Consideriamo, a fini esplicativi, una funzione di utilita' di tipo quadratico:

$$(9.6) \quad u(x) = x - \frac{1}{2} r x^2$$

La (9.1) risulta:

$$(9.7) \quad \begin{aligned} \bar{u}_i [W_i, F] &= \int_0^\infty \left[ (W_i - x) - \frac{1}{2} r (W_i - x)^2 \right] dF(x) = \\ &= \frac{1}{2r} - \frac{r}{2} \left[ \sigma^2(x) + \left( \frac{1}{r} - W_i + P \right)^2 \right] \end{aligned}$$

in cui si ponga

$$\sigma^2(x) = \int_0^\infty (x-P)^2 dF(x) \quad ; \quad P = \int_0^\infty x dF(x)$$

Parimenti la (9.3) diventa:

$$(9.8) \quad \begin{aligned} \bar{u}_i [W_i, H] &= \int_0^\infty \left[ \left( W_i - \frac{z}{n} \right) - \frac{1}{2} r \left( W_i - \frac{z}{n} \right)^2 \right] dH(z) = \\ &= - \frac{1}{2} r W_i^2 + r W_i \frac{E(z)}{n} - \frac{1}{2n^2} r \left[ \sigma^2(z) + E(z)^2 \right] + W_i - \frac{E(z)}{n} \end{aligned}$$

Poiche' inoltre

$$E(z) = nE(x) = nP \quad ; \quad \sigma^2(z) = n\sigma^2(x)$$

si ricava dunque:

$$(9.9) \quad \bar{u}_i[W_i, H] = \frac{1}{2r} - \frac{r}{2} \left[ \frac{\sigma^2(x)}{n} + \left( \frac{1}{r} - W_i + P \right)^2 \right]$$

In modo del tutto analogo si ottiene per la (9.5):

$$(9.10) \quad \bar{u}_i[W_i, H; k] = \frac{1}{2r} - \frac{r}{2} \left[ (1-k)^2 \frac{\sigma^2(x)}{n} + \left( \frac{1}{r} - W_i + (1+\lambda k)P \right)^2 \right]$$

Infatti:

$$(9.11) \quad \begin{aligned} \bar{u}_i[W_i, H; k] &= \\ &= \int_0^\infty \left[ \left( W_i - (1+\lambda)k \frac{\pi}{n} - (1-k) \frac{z}{n} \right) - \frac{1}{2} r \left( W_i - (1+\lambda)k \frac{\pi}{n} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (1-k) \frac{z}{n} \right)^2 \right] dH(z) = - \frac{r}{2} W_i^2 - \frac{r}{2} (1+\lambda)^2 k^2 P^2 - \\ &\quad - \frac{r}{2n^2} (1-k)^2 \left[ \sigma^2(z) + E(z)^2 \right] + r W_i (1+\lambda) k P + r W_i (1-k) \frac{E(z)}{n} - \\ &\quad - r \frac{E(z)}{n} (1+\lambda) (1-k) k P + W_i - (1+\lambda) k P - (1-k) \frac{E(z)}{n} = \\ &= \frac{1}{2r} - \frac{r}{2} \left[ (1-k)^2 \frac{\sigma^2(x)}{n} + \left( \frac{1}{r} - W_i + (1+\lambda k)P \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Confrontando la (9.9) con la (9.7), si ottiene:

$$(9.12) \quad \bar{u}_i[W_i, H] - \bar{u}_i[W_i, F] = \frac{r}{2} \sigma^2(x) \left[ 1 - \frac{1}{n} \right]$$

ovvero l'utilita' attesa incrementale, derivante dall'adesione alla coalizione per la i-sima Compagnia, e' crescente rispetto

ad  $n$  e non dipende dalla disponibilita' finanziaria  $W_i$ . Invece, dal confronto della (9.10) con la (9.9) ricaviamo:

$$(9.13) \quad \begin{aligned} \bar{u}_i[W_i, H; k] - \bar{u}_i[W_i, H] &= \\ &= \frac{r\sigma^2(x)}{2n} [2k - k^2] - \frac{r\lambda k P}{2} \left[ \lambda k P + 2 \left( \frac{1}{r} - W_i + P \right) \right] \end{aligned}$$

differenza che varia in funzione di  $W_i$ . Qualora si intenda determinare l'aliquota ottima  $k^*$  di trasferimento ( $0 \leq k^* \leq 1$ ), derivando la (9.10) otteniamo:

$$(9.14) \quad k^* = \frac{\lambda P [r W_i - r P - 1] + \frac{r}{n} \sigma^2(x)}{r \left[ \lambda^2 P^2 + \frac{\sigma^2(x)}{n} \right]}$$

e nell'ipotesi di una distribuzione del rischio di tipo esponenziale negativo,  $F(x) = 1 - e^{-x}$ , in particolare:

$$(9.15) \quad k^* = \frac{\lambda [r W_i - r - 1] + \frac{r}{n}}{r \left[ \lambda^2 + \frac{1}{n} \right]}$$

## 10. Il trattato reciproco

Un modello decisionale di particolare interesse consiste nella determinazione della funzione di risarcimento ottima tra due Compagnie le quali stabiliscano un rapporto reciproco di trasferimento del rischio. Nell'impostazione originale del problema, K. Borch ha riferito l'analisi ad un gioco competitivo tra due persone (le Imprese che operano sul mercato) a somma nulla, riportando alcuni risultati di Nash e riferendosi nella determinazione delle strategie alla condizione di ottimo paretiano. Consideriamo dunque che in un ipotetico mercato assicu-

rativo operino due Imprese, che denomineremo  $C_1$  e  $C_2$ , con le seguenti caratteristiche:

$$(10.1) \quad \begin{aligned} C_1 &\triangleq \left\{ u_1(x); \tilde{x}_1 \sim F_1(x_1); W_1; P_1 = \int_0^\infty x_1 dF_1(x_1) \right\} \\ C_2 &\triangleq \left\{ u_2(x); \tilde{x}_2 \sim F_2(x_2); W_2; P_2 = \int_0^\infty x_2 dF_2(x_2) \right\} \end{aligned}$$

ciascuna con una propria funzione di utilita'  $u_i(\cdot)$ , un portafoglio  $\tilde{x}_i$ , un fondo di garanzia  $W_i$  e massa premi  $P_i$  ( $i=1,2$ ), con  $\tilde{x}_1$  e  $\tilde{x}_2$  variabili aleatorie indipendenti. Si supponga che venga stabilito un accordo (trattato) mediante il quale si intenda definire una *funzione di risarcimento*  $y(x_1, x_2)$  tale che al verificarsi del danno  $(x_1+x_2)$  la Compagnia  $C_1$  risarcira'  $y(x_1, x_2)$ , mentre rimarra' a carico della Compagnia  $C_2$  l'impegno residuo  $x_1+x_2-y(x_1, x_2)$ . In questi termini l'obiettivo di  $C_1$  consiste nel determinare una funzione ottima di pagamento  $y=y^*(x_1, x_2)$  tale da massimizzare l'utilita' attesa del rischio globale:

$$(10.2) \quad \begin{aligned} \bar{u}_1(y) &\stackrel{def}{=} \int_0^\infty \int_0^\infty u_1[W_1 + P_1 - y(x_1, x_2)] dF_1(x_1) dF_2(x_2) \\ \max_y \bar{u}_1(y) &\stackrel{def}{=} \bar{u}_1(y^*) \end{aligned}$$

Analogamente per la Compagnia  $C_2$ :

$$(10.3) \quad \begin{aligned} \bar{u}_2(y) &\stackrel{def}{=} \int_0^\infty \int_0^\infty u_2[W_2 + P_2 - x_1 - x_2 + y(x_1, x_2)] dF_1(x_1) dF_2(x_2) \\ \max_y \bar{u}_2(y) &\stackrel{def}{=} \bar{u}_2(y^*) \end{aligned}$$

Come si puo' notare, la funzione di pagamento ottima  $y^*$  deve soddisfare entrambe le Imprese; vale a dire deve essere tale da costituire una *situazione di equilibrio stabile*, inten-

dendo con tale locuzione l'appartenenza ad un *insieme di ottimo paretiano*. Nel caso in esame, se indichiamo con  $\mathcal{F}_P$  l'insieme di ottimo paretiano ( $y^* \in \mathcal{F}_P$ ), cio' in sostanza sta a significare che comunque si consideri una diversa funzione  $y \notin \mathcal{F}_P$  che comporti un incremento in utilita' per l'una necessariamente si verifica una perdita in utilita' per l'altra; e quindi non si realizza per le Compagnie il problema di ottimo (10.2), (10.3). Una prima fase della ricerca della strategia di pagamento consiste nella esclusione di tutte le funzioni  $y$  *dominate* da  $y^*$ , cioe':

$$(10.4) \quad y : \begin{cases} \bar{u}_1(y) < \bar{u}_1(y^*) \\ \bar{u}_2(y) < \bar{u}_2(y^*) \end{cases}$$

Successivamente si procede alla determinazione di  $y^*$ , imponendo la seguente condizione necessaria e sufficiente di appartenenza a  $\mathcal{F}_P$ :

$$(10.5) \quad \mathcal{F}_P \stackrel{def}{=} \left\{ y=y^* : \frac{\dot{u}_1[W_1 + P_1 - y]}{\dot{u}_2[W_2 + P_2 - x_1 - x_2 + y]} = k \text{ (cost. } > 0) \right\}$$

In pratica la (10.5) definisce la soluzione ottima  $y^* \in \mathcal{F}_P$  sotto la condizione che il rapporto tra le utilita' marginali delle due Compagnie si mantenga costante; situazione per l'appunto di equilibrio che riflette come un possibile vantaggio per l'una non deve implicare un medesimo svantaggio per l'altra, cosa che avviene per  $y \neq y^*$ . La dimostrazione della condizione di appartenenza (10.5) all'insieme di ottimo paretiano puo' essere impostata (ci riferiremo alla parte necessaria) osservando innanzi tutto che, se  $y^* \in \mathcal{F}_P$ , allora debbono risultare incompatibili le seguenti disuguaglianze:

$$(10.6) \quad \begin{cases} \Delta \bar{u}_1 \stackrel{def}{=} \bar{u}_1(y) - \bar{u}_1(y^*) > 0 \\ \Delta \bar{u}_2 \stackrel{def}{=} \bar{u}_2(y) - \bar{u}_2(y^*) > 0 \end{cases}$$

per qualsiasi altra funzione  $y \notin \mathcal{F}_P$ . Si osservi che le relazio-

ni di preferenza:

$$(10.7) \quad y \succ y^* \begin{cases} \Leftrightarrow \bar{u}_1(y) > \bar{u}_1(y^*) \\ \Leftrightarrow \bar{u}_2(y) > \bar{u}_2(y^*) \end{cases}$$

si contraddicono reciprocamente, in quanto, come si e' detto, per una funzione di pagamento non appartenente all'insieme  $\mathcal{F}_p$ , l'incremento in utilita' di  $C_1$  ( $\Delta \bar{u}_1$ ) comporta  $\Delta \bar{u}_2 < 0$  per  $C_2$ . Al fine di verificare che  $\Delta \bar{u}_1 \cdot \Delta \bar{u}_2 < 0$ , sia:

$$(10.8) \quad y = y^* + \Delta(x_1, x_2)$$

con  $|\Delta(x_1, x_2)|$  funzione infinitesima. Considerando la disponibilita' finanziaria  $W_1$ , si avra' per la Compagnia  $C_1$ :

$$(10.9) \quad \Delta \bar{u}_1 = \int_0^\infty \int_0^\infty [u_1(W_1 - y^* - \Delta) - u_1(W_1 - y^*)] dF_1(x_1) dF_2(x_2)$$

e poiche'  $|\Delta(x_1, x_2)| \rightarrow 0$ , possiamo scrivere:

$$(10.10) \quad \frac{u_1(W_1 - y^* - \Delta) - u_1(W_1 - y^*)}{\Delta(x_1, x_2)} \cong -\dot{u}_1[W_1 - y^*]$$

Sostituendo quindi la (10.10) nella (10.9) si ottiene:

$$(10.11) \quad \Delta \bar{u}_1 \cong - \int_0^\infty \int_0^\infty \dot{u}_1[W_1 - y^*] \Delta(x_1, x_2) dF_1(x_1) dF_2(x_2)$$

Parimenti, con riferimento ad una disponibilita' finanziaria  $W_2$ , avremo per la Compagnia  $C_2$ :

$$(10.12) \quad \Delta \bar{u}_2 = \int_0^\infty \int_0^\infty [u_2(W_2 - x_1 - x_2 + y^* + \Delta) - u_2(W_2 - x_1 - x_2 + y^*)] dF_1(x_1) dF_2(x_2)$$

ed approssimando il rapporto incrementale:

$$(10.13) \quad \frac{u_2(W_2 - x_1 - x_2 + y^* + \Delta) - u_2(W_2 - x_1 - x_2 + y^*)}{\Delta(x_1, x_2)} \cong \dot{u}_2[W_2 - x_1 - x_2 + y^*]$$

Sostituendo nella (10.12), si ricava:

$$(10.14) \quad \Delta \bar{u}_2 \cong \int_0^\infty \int_0^\infty \dot{u}_2[W_2 - x_1 - x_2 + y^*] \Delta(x_1, x_2) dF_1(x_1) dF_2(x_2)$$

E' immediato, dal confronto (10.4) e (10.11) l'asserto.

Cio' posto, se indichiamo con

$$(10.15) \quad \begin{aligned} \bar{u}_1(0) &\stackrel{def}{=} \int_0^\infty u_1[W_1 + P_1 - x_1] dF_1(x_1) \\ \bar{u}_2(0) &\stackrel{def}{=} \int_0^\infty u_2[W_2 + P_2 - x_2] dF_2(x_2) \end{aligned}$$

rispettivamente le utilita' attese delle due Compagnie prima del rapporto riassicurativo, il comportamento razionale suggerisce ad entrambe di accordarsi su una funzione di pagamento ottima  $y^* \in \mathcal{F}_p$  soddisfacente alle disuguaglianze:

$$(10.16) \quad \begin{cases} \bar{u}_1(y^*) \geq \bar{u}_1(0) \\ \bar{u}_2(y^*) \geq \bar{u}_2(0) \end{cases}$$

Tale modello decisionale, nei suoi caratteri generali, non formula particolari ipotesi sulla struttura della funzione di utilita' delle Imprese, ne' specifica le distribuzioni di probabilita'  $F_1(x_1)$  e  $F_2(x_2)$  degli impegni aleatori  $\tilde{x}_1$  e  $\tilde{x}_2$ . Pertanto l'analisi puo' essere opportunamente estesa considerando diversi atteggiamenti delle due Compagnie nei confronti del rischio; dalla diversa disponibilita' all'alea si ottengono sostanziali modifiche nella funzione di pagamento  $y^*(x_1, x_2)$ .

Si consideri dunque la seguente ipotesi:

$$(10.17) \quad \begin{aligned} \text{Hp1):} \quad u_1(x) &= a_1x + b \\ u_2(x) &= a_2x + b \end{aligned} \quad (a_1, a_2, b > 0)$$

ovvero entrambe le Compagnie sono indifferenti al rischio. Indicando per semplicità  $z = x_1 + x_2$  e riferendoci ad una disponibilità finanziaria  $W_i$  ( $i=1, 2$ ), la condizione (10.5) implica:

$$(10.18) \quad \frac{\dot{u}_1[W_1 - y]}{\dot{u}_2[W_2 - z + y]} = k \implies a_1 = k a_2$$

In questo caso, data la struttura lineare delle funzioni di utilità, non si perviene a nessun accordo di ripartizione dell'alea. Supponiamo invece, come seconda ipotesi da discutere, che:

$$(10.19) \quad \begin{aligned} \text{Hp2):} \quad u_1(x) &= -x^2 + ax \\ u_2(x) &= x \end{aligned} \quad (a > 0)$$

cioè la Compagnia  $C_1$  valuta le alternative mediante una funzione di utilità convessa di tipo quadratico, con coefficiente assoluto di avversione al rischio  $\rho_a = 2/a - 2x$  e punto critico  $x_c = a/2$ ; la Compagnia  $C_2$  è indifferente al rischio. La funzione di pagamento ottima  $y^*$  risulta:

$$(10.20) \quad y^* = W_1 - \frac{1}{2} [a - k]$$

Si osservi che  $y^*$  è indipendente da  $(x_1, x_2)$ , e pertanto è interpretabile come prezzo che la Compagnia  $C_1$  paga alla Compagnia  $C_2$  per il trasferimento dell'intero portafoglio: importo che dipende dalla costante di proporzionalità  $k$ , per il momento indeterminata. Al fine di valutare il valore  $\hat{k}$  sul quale le Imprese si accorderanno, definiamo prima di tutto un intervallo di ammissibilità  $I(k)$  in cui deve necessariamente essere contenuto. Per la (10.16) si ha:

$$(10.21) \quad I(k) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \bar{u}_1[y^*(k)] > \bar{u}_1(0) \\ \bar{u}_2[y^*(k)] > \bar{u}_2(0) \end{cases}$$

Calcoliamo le utilità attese  $\bar{u}_i(0)$  prima del rapporto riassicurativo e  $\bar{u}_i[y^*(k)]$  dopo il rapporto ( $i = 1, 2$ ). L'utilità attesa iniziale di  $C_1$  risulta:

$$(10.22) \quad \begin{aligned} \bar{u}_1(0) &= \int_0^\infty u[W_1 - x_1] dF_1(x_1) = \\ &= \int_0^\infty [-(W_1 - x_1)^2 + a(W_1 - x_1)] dF_1(x_1) = -(W_1 - P_1)^2 + \\ &\quad + a(W_1 - P_1) - \sigma^2(x_1) \end{aligned}$$

$$\text{dove } P_1 = \int_0^\infty x_1 dF_1(x_1) \text{ e } \sigma^2(x_1) = \int_0^\infty (x_1 - P_1)^2 dF_1(x_1).$$

Mentre per  $C_2$ :

$$(10.23) \quad \bar{u}_2(0) = \int_0^\infty u[W_2 - x_2] dF_2(x_2) = \int_0^\infty [W_2 - x_2] dF_2(x_2) = W_2 - P_2$$

Dopo l'accordo sulla funzione  $y^*$  data dalla (10.20), le utilità attese divengono:

$$(10.24) \quad \begin{aligned} \bar{u}_1[y^*(k)] &= \int_0^\infty \int_0^\infty u_1[W_1 - y^*(k)] dF_1(x_1) dF_2(x_2) = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty [-(W_1 - y^*(k))^2 + a(W_1 - y^*(k))] dF_1(x_1) dF_2(x_2) = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ -\left(W_1 - W_1 + \frac{1}{2}(a - k)\right)^2 + a\left(W_1 - W_1 + \frac{1}{2}(a - k)\right) \right] dF_1(x_1) dF_2(x_2) = \\ &= -\left[\frac{1}{2}(a - k)\right]^2 + a\left[\frac{1}{2}(a - k)\right]. \end{aligned}$$

per la Compagnia  $C_1$ , in quanto  $\int_0^\infty \int_0^\infty dF_1(x_1)dF_2(x_2)=1$ . D'altro canto per  $C_2$ :

$$\begin{aligned} \bar{u}_2[y^*(k)] &= \int_0^\infty \int_0^\infty u_2[W_2-x_1-x_2+y^*(k)] dF_1(x_1)dF_2(x_2) = \\ (10.25) \quad &= \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ W_2-x_1-x_2+W_1-\frac{1}{2}(a-k) \right] dF_1(x_1)dF_2(x_2) = \\ &= \int_0^\infty dF_2(x_2) \int_0^\infty \left[ W_2-x_1-x_2+W_1-\frac{1}{2}(a-k) \right] dF_1(x_1) \end{aligned}$$

Dal momento che

$$(10.26) \quad E_{x_1} \left[ W_2-x_1-x_2+W_1-\frac{1}{2}(a-k) \right] = W_2-P_1-x_2+W_1-\frac{1}{2}(a-k)$$

si ottiene in definitiva:

$$\begin{aligned} \bar{u}_2[y^*(k)] &= E_{x_2} \left[ W_2-P_1-x_2+W_1-\frac{1}{2}(a-k) \right] = \\ (10.27) \quad &= W_1+W_2-(P_1+P_2)-\frac{1}{2}(a-k) \end{aligned}$$

Siamo in grado pertanto di stabilire per la (10.21) l'intervallo di ammissibilita'  $I(k)$  per  $k$ :

$$(10.28) \quad I(k) = \left\{ k : a-2(W_1-P_1) < k < \sqrt{[a-2(W_1-P_1)]^2+4\sigma^2(x_1)} \right\}$$

Allo scopo di realizzare ancora una situazione di equilibrio, le due Compagnie dovranno accordarsi su un valore ottimo  $\hat{k}$  soddisfacente entrambe. La soluzione, fornita da Nash, consiste nel determinare quel valore  $\hat{k}$  che massimizzi le utilita' attese incrementali congiunte, ovvero:

$$(10.29) \quad \hat{k} : \max_k \left\{ [\bar{u}_1[y^*(k)]-\bar{u}_1(0)] \cdot [\bar{u}_2[y^*(k)]-\bar{u}_2(0)] \right\}$$

Tenendo conto delle espressioni (10.22), (10.23), (10.24) e (10.27), si ottiene:

$$(10.30) \quad \hat{k} = \frac{2}{3} \sqrt{[a-2(W_1-P_1)]^2+4\sigma^2(x_1)} + \frac{1}{3} [a-2(W_1-P_1)]$$

La (10.30) pone in evidenza che, aumentando  $\hat{k}$  in corrispondenza della varianza  $\sigma^2(x_1)$ , il trattato reciproco favorisce indirettamente la Compagnia  $C_2$  in quanto la Compagnia  $C_1$  per valori crescenti della variabilita' del proprio portafoglio  $\tilde{x}_1$  e maggiormente propensa a trasferire l'alea, trovandosi in condizione di avversione al rischio. Occorre altresì osservare che la funzione di pagamento ottima

$$(10.31) \quad y^* = W_1 - \frac{1}{2}(a-\hat{k})$$

decrece al crescere del parametro  $a$  presente nel coefficiente assoluto di avversione al rischio  $\rho_a$ , e pertanto piu' basso risulta per l'Impresa  $C_1$  piu' alto di conseguenza sara' il prezzo  $y^*$  da corrispondere a  $C_2$ .

Come terza ipotesi del modello si considerino le due Compagnie in situazioni di avversione al rischio, con funzioni di utilita' convesse del tipo:

$$\begin{aligned} \text{Hp 3):} \quad & u_1(x) = -a_1x^2 + x \quad \left( a_1 = \frac{1}{2} r_1 \right) \\ (10.32) \quad & u_2(x) = -a_2x^2 + x \quad \left( a_2 = \frac{1}{2} r_2 \right) \end{aligned}$$

La funzione di pagamento appartenente all'insieme di ottimo paretiano  $\mathcal{F}_p$  risulta, per la (10.5):

$$\begin{aligned} y^*(x_1, x_2) &= \frac{2a_1(W_1+P_1)-2a_2k(W_2+P_2)+2a_2k(x_1+x_2)+k-1}{2(a_1+a_2k)} = \\ (10.33) \quad &= \frac{a_2k}{a_1+a_2k} (x_1+x_2) + \frac{a_1P_1}{a_1+a_2k} - \frac{a_2kP_2}{a_1+a_2k} + \frac{2a_1W_1-2a_2kW_2+k-1}{2(a_1+a_2k)} \end{aligned}$$

La (10.33) può essere anche scritta in modo semplificato:

$$(10.34) \quad y^*(x_1, x_2) = (1-h)[x_1+x_2] + hP_1 - (1-h)P_2 + Z$$

dove si è posto

$$h = \frac{a_1}{a_1+a_2k} \quad ; \quad 1-h = \frac{a_2k}{a_1+a_2k} \quad ;$$

$$Z = \frac{2a_1W_1 - 2a_2kW_2 + k - 1}{2(a_1+a_2k)} = (1-h) \left[ \frac{1}{2a_2} - W_2 \right] - h \left[ \frac{1}{2a_1} - W_1 \right]$$

Dalla (10.34) emerge che l'accordo ottimo si basa su un trattato proporzionale in quota. Infatti, considerando  $y^*(x_1, x_2)$  quale funzione di pagamento della Compagnia  $C_1$  alla Compagnia  $C_2$ , osserviamo che:

- I)-  $C_1$  cede una quota  $h$  ( $0 \leq h \leq 1$ ) della propria massa premi  $P_1$ ; se l'evento  $\tilde{x}_1$  si verifica, trattiene l'impegno di competenza  $(1-h)\tilde{x}_1$ ;
- II)-  $C_2$  cede a sua volta la quota  $(1-h)$  della propria massa premi  $P_2$  (difatti  $(1-h)P_2$  ha segno negativo in  $y^*$ , stando a significare un incasso per  $C_1$ ); se l'evento  $\tilde{x}_2$  si verifica, trattiene l'impegno di competenza  $h\tilde{x}_2$  (e quindi per  $C_1$  la copertura  $(1-h)\tilde{x}_2$ );
- III)- l'importo  $Z$  ( $\geq 0$ ) rappresenta un trasferimento di parte del fondo di garanzia da  $C_1$  a  $C_2$ , o viceversa se con segno negativo.

In tali termini per l'Impresa  $C_1$  si avrà l'utilità attesa iniziale:

$$(10.35) \quad \bar{u}_1(0) = \int_0^\infty u_1[W_1+P_1-x_1]dF_1(x_1) =$$

$$= \int_0^\infty [-a_1(W_1+P_1-x_1)^2 + (W_1+P_1-x_1)]dF_1(x_1) = W_1 - a_1W_1^2 - a_1\sigma^2(x_1) =$$

$$= \frac{1}{4a_1} - a_1 \left[ \frac{1}{2a_1} - W_1 \right]^2 - a_1\sigma^2(x_1)$$

E parimenti l'utilità attesa  $u_1[y^*(x_1, x_2; h)]$  dopo l'accordo reciproco:

$$(10.36) \quad \bar{u}_1[y^*(x_1, x_2; h)] = \int_0^\infty \int_0^\infty u_1[W_1+P_1-y^*(x_1, x_2; h)]dF_1(x_1)dF_2(x_2) =$$

$$= \frac{1}{4a_1} - a_1(1-h)^2 \left[ \left( \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} - W_1 - W_2 \right)^2 + \sigma^2(x_1) + \sigma^2(x_2) \right]$$

In maniera del tutto analoga, per la Compagnia  $C_2$  otteniamo:

$$(10.37) \quad \bar{u}_2(0) = \int_0^\infty u_2[W_2+P_2-x_2]dF_2(x_2) =$$

$$= \frac{1}{4a_2} - a_2 \left[ \frac{1}{2a_2} - W_2 \right]^2 - a_2\sigma^2(x_2)$$

Ed ancora:

$$(10.38) \quad u_2[y^*(x_1, x_2; h)] = \int_0^\infty \int_0^\infty u_2[W_2+P_2-x_1-x_2+y^*(x_1, x_2; h)]dF_1(x_1)dF_2(x_2)$$

$$= \frac{1}{4a_2} - a_2h^2 \left[ \left( \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} - W_1 - W_2 \right)^2 + \sigma^2(x_1) + \sigma^2(x_2) \right]$$

In tal modo è completamente definito, in questo caso, l'intervallo di ammissibilità  $I(h)$  mediante le disuguaglianze:

$$(10.39) \quad I(h) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \bar{u}_1[y^*(x_1, x_2; h)] > \bar{u}_1(0) \\ \bar{u}_2[y^*(x_1, x_2; h)] > \bar{u}_2(0) \end{cases}$$

Il risultato terminale della negoziazione consiste dunque nel determinare un valore  $\hat{h}$  di equilibrio, in quanto, essendo  $y^*(x_1, x_2; h)$  una funzione di pagamento della Compagnia  $C_1$  nei confronti della Compagnia  $C_2$ , il comportamento razionale di  $C_1$  tenderà su un accordo per un valore di  $h$  più alto possibile;



il piu' piccolo possibile viceversa per  $C_2$ . E' evidente l'adozione del criterio *minimax* per tale gioco tra due persone a somma nulla; l'aliquota  $\hat{h}$  e' in sostanza un *punto di sella*. Per quanto esposto in precedenza si tratta in definitiva di determinare  $\hat{h}$  come quella politica di trasferimento che massimizzi le utilita' attese incrementali delle due Compagnie:

$$(10.40) \hat{h} : \max_h [\bar{u}_1[y^*(x_1, x_2; h)] - \bar{u}_1(0)] \cdot [\bar{u}_2[y^*(x_1, x_2; h)] - \bar{u}_2(0)]$$

## BIBLIOGRAFIA

### Testi

- 1 - W.J. Baumol: *Economic theory and operations analysis*, Prentice Hall 1965 .
- 2 - R.E. Beard, T. Pentikäinen, E. Pesonen: *Risk theory: the stochastic basis of Insurance*, Chapman and Hall 1977.
- 3 - K. Borch: *The mathematical theory of Insurance*, Lexington Books 1974.  
— *The economics of uncertainty*, Princeton University Press 1972.
- 4 - H. Bühlmann: *Mathematical Methods in Risk Theory*, Springer Verlag 1970.
- 5 - B. De Finetti, F. Emanuelli: *Economia delle assicurazioni*, Utet 1967.
- 6 - P. Fishburn: *Decision and value theory*, J. Wiley 1964.
- 7 - J. Hadar: *Mathematical theory of economic behavior*, Addison Wesley 1971.
- 8 - J. Hammond: *Essay in the theory of risk and insurance*, Scott Foresman Company 1968.
- 9 - V. Neumann, O. Morgenstern: *Theory of games and Economic behavior*, Princeton Press 1947.
- 10 - H.L. Seal: *Stochastic theory of risk business*, J. Wiley 1969.  
— *Survival probabilities: the goal of risk theory*, J. Wiley 1978.

### Articoli

Lista delle riviste:

- A. M. S. = Annals of Mathematical Statistics  
Ast. B. = Astin Bulletin

Ec.	=	Econometrica
G. I. I. A.	=	Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari
G. R. I.	=	The Geneva papers of Risk and Insurance
J. In.	=	The Journal of Insurance
J. P. E.	=	Journal of Political Economy
J. R. In.	=	The Journal of Risk and Insurance
Q. I. S. A.	=	Quaderni dell'Istituto degli Studi Assicurativi
Sk. Akt.	=	Skandinavisk Aktuarietidskrift
Sc. Act. J.	=	Scandinavian Actuarial Journal (1968)
Sk. Jub. VI.	=	Skandia Jubilee Volume

- 1 - H. Ammeter: *A generalisation of the Collective Theory of Risk in regard to fluctuating basic probabilities*, Sk. Akt. 1948.
- 2 - G. Arfwedson: *Some problems in the Collective Theory of Risk*, Sk. Akt. 1950; *Research in Collective Risk Theory*, Sk. Akt. 1954.
- 3 - H. Bohman: *A mathematical model of Insurance business and how it may be used*, G.R.I. n.11 1979.
- 4 - K. Borch: *Reciprocal Reinsurance Treaties*, Ast. B. 1958; *The utility concept applied to the theory of Insurance*, Ast. B. 1958; *Equilibrium in a reinsurance market*, Ec. vol.30 1962; *Optimal life insurance*, G.R.I. n.7 1977.
- 5 - H. Bühlmann: *Il problema dei pieni di conservazione*, Q. I.S.A. n.29 Trieste 1975.
- 6 - R. Cacciafesta: *La probabilita' di fallimento e il problema della riassicurazione nell'ambito della teoria asintotica del rischio*, G.I.I.A. 1962.
- 7 - H. Cramér: *Collective Risk Theory*, Sk. Jub. VI. Stoccolma 1955.
- 8 - L. Daboni: *Fondamenti della teoria del rischio*, Q. I.S.A. n.29 Trieste 1975.
- 9 - C. De Ferra: *Considerazioni sulle funzioni di utilita' in connessione con la Teoria del Rischio*, G.I.I.A. 1964; *Sulla vantaggiosita' delle operazioni assicurative*, G.I.I.A. 1968.

- 10 - B. De Finetti: *Il problema dei pieni*, G.I.I.A. 1940.
- 11 - B. De Mori: *Possibilita' di stabilire un criterio obiettivo per un minimo di solvibilita' delle imprese private di assicurazione*, G.I.I.A. 1960; *Sul margine minimo di solvibilita' delle imprese di assicurazione contro i danni*, G.I.I.A. 1966.
- 12 - D. Fürst: *La rovina dei giocatori nel caso di riserva limitata*, G.I.I.A. 1956; *Il caso limite del problema della rovina dei giocatori nella ipotesi di riserva limitata*, G.I.I.A. 1957.
- 13 - K. Hagstroem: *Remarks on Risk Theory*, Sk. Akt. 1934.
- 14 - D. Houston: *Risk theory*, J. In. vol.27 1965.
- 15 - R. Johnson: *Reinsurance: theory, the new applications, and the future*, J.R. In. n.1 1977.
- 16 - J. Mossin: *Aspects of Rational Insurance Purchasing*, J.P.E. 1968.
- 17 - J. Nash: *The Bargaining Problem*, Ec. 1950.
- 18 - G. Ottaviani: *Sulla teoria del rischio del Lundberg ed il suo legame con la teoria classica*, G.I.I.A. 1940; *Sul problema della riassicurazione*, G.I.I.A. 1952.
- 19 - M. Ottaviani: *Sulla probabilita' di fallimento di una impresa di assicurazione nel caso in cui il caricamento per il rischio vari in funzione dell'ammontare del fondo di garanzia*, G.I.I.A. 1970.
- 20 - R. Ottaviani: *Sul concetto di utilita' nelle assicurazioni*, G.I.I.A. 1968.
- 21 - T. Pentikäinen: *On the solvency of Insurance Companies*, Ast. B. vol.4 1966; *The theory of Risk and some applications*, J.R. In. 1980.
- 22 - N. Prabhu: *On the ruin problem of collective risk theory*, A.M.S. n.32 1961.
- 23 - F. Pressacco: *Valori e prezzi di un mercato riassicurativo*, Q. I.S.A. n.32 Trieste 1979.
- 24 - P. Schoemaker, H. Kunreuther: *An experimental study of insurance decisions*, J.R. In. n.4 1979.

- 25 - G.C. Taylor: *Probability of Ruin with variable premium rate*, Sc. Act. J. n.2 1980.
- 26 - B. Tedeschi: *Alcune considerazioni sulla teoria classica e sulla teoria collettiva del rischio*, G.I.I.A. 1951; *Sul calcolo dei premi nell'assicurazione danni*, G.I.I.A. 1960; *Sull'applicazione della teoria del rischio*, G.I.I.A. 1963.
- 27 - E. Volpe di Prignano: *Sulla misurabilità del premio d'indifferenza nei rami elementari*, G.I.I.A. 1974.
- 28 - C. Williams: *Game theory and Insurance consumption*, J. In. 1960.